

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Μαθηματικά προσανατολισμού
Β΄ Λυκείου**

Εκφωνήσεις - Λύσεις



2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr



Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

Διανύσματα

Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

Θέμα 2ο

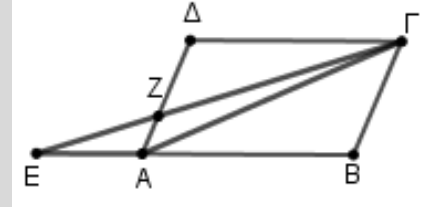
21165. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Τα σημεία E και Z είναι τέτοια ώστε

$$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ και } \overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ}$.

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Z , E και Γ είναι συνευθειακά.



Λύση

α) $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta} - \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta},$

$$\overrightarrow{Z\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AZ} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \frac{1}{3}\vec{\beta} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta}.$$

β) Είναι $\overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3}\vec{\beta} = 2\left(\frac{1}{2}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}\right) = 2\overrightarrow{EZ}.$

γ) Επειδή $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ}$ είναι $\overrightarrow{Z\Gamma} // \overrightarrow{EZ}$ και τα διανύσματα έχουν κοινό άκρο το σημείο Z έχουμε το συμπέρασμα ότι τα σημεία Z , E και Γ είναι συνευθειακά.

22055. Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$.

α) Να εξηγήσετε γιατί:

(i) το μήκος της πλευράς BA είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'A'$ και

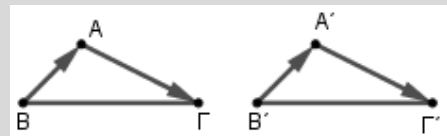
(ii) το μήκος της πλευράς $A\Gamma$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $A'\Gamma'$.

β) i. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B'\Gamma'}$.

ii. Να εξηγήσετε γιατί το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'\Gamma'$.

γ) Θα μπορούσε η ακόλουθη πρόταση να ήταν κριτήριο ισότητας τριγώνων;

«Αν για δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα». Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) (i) Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B'A'}$ είναι ίσα έχουν και ίσα μέτρα.

(ii) Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A'\Gamma'}$ είναι ίσα έχουν και ίσα μέτρα.

β) (i) Είναι $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'\Gamma'} = \overrightarrow{B'\Gamma'}$

(ii) Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ είναι ίσα έχουν και ίσα μέτρα.

γ) Ναι γιατί τα δύο τρίγωνα έχουν και τις 3 πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα.

Θέμα 4ο

22068. Σε ένα υλικό σημείο O εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ οι οποίες σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120° , έτσι ώστε το υλικό σημείο O να ισορροπεί.

α) Ποια σχέση ανάμεσα στα διανύσματα $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ εκφράζει την συνθήκη ισορροπίας;

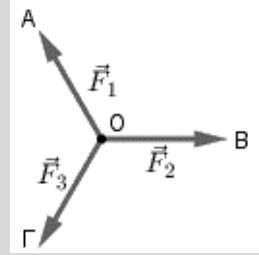
β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ είναι αντίθετα.

γ) Αν A, B, Γ, Δ είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ και $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, αντίστοιχα (θεωρούμενων ως διανυσμάτων με αρχή το σημείο O), τότε να αποδείξετε ότι:

i. $\angle A\hat{O}\Delta = \angle B\hat{O}\Delta = 60^\circ$.

ii. $\angle O\hat{\Delta}B = 60^\circ$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$.



Λύση

α) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$.

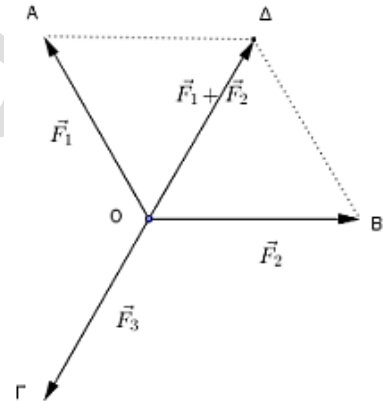
β) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$.

γ) i. Επειδή οι γωνίες των διανυσμάτων $\vec{F}_1, \vec{F}_3$ και $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ είναι 120° , είναι $\angle A\hat{O}\Delta = \angle B\hat{O}\Delta = 60^\circ$ ως παραπληρωματικές τους.

ii. Είναι $\angle O\hat{\Delta}B = \angle O\hat{A}\Delta = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $B\Delta$, $O\Delta$ που τέμνονται από την $O\Delta$.

δ) Το τετράπλευρο $A\Delta B O$ είναι παραλληλόγραμμο και η διαγώνιος $O\Delta$ διχοτομεί τη γωνία O , οπότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος και οι πλευρές του είναι ίσες. Άρα $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$.

Το τρίγωνο $A\hat{O}\Delta$ είναι ισοσκελές ($OA = A\Delta$) και έχει μια γωνία του 60° , οπότε είναι ισόπλευρο και $O\Delta = OA = A\Delta$, άρα $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |O\Delta| = |\vec{F}_1| \Leftrightarrow |-\vec{F}_3| = |\vec{F}_1| \Leftrightarrow |\vec{F}_3| = |\vec{F}_1|$. Επομένως $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$.



Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Θέμα 2ο

15010. Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου A, B, Γ και τα διανύσματα $\vec{BA}$ και $\vec{GE}$ τέτοια ώστε $\vec{BA} = \vec{BA} + \vec{BG}$ και $\vec{GE} = \vec{GA} + \vec{GB}$.

α) i. Να δείξετε ότι $\vec{AA} = \vec{BG}$ και $\vec{AE} = \vec{GB}$.

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{AA}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία A, Δ, και E είναι συνευθειακά.

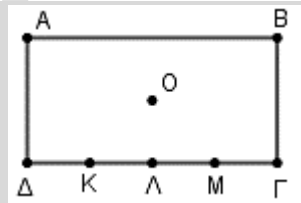
Λύση

α) i. Είναι $\vec{AA} = \vec{BA} - \vec{BA} = \vec{BA} + \vec{BG} - \vec{BA} = \vec{BG}$ και $\vec{AE} = \vec{GE} - \vec{GA} = \vec{GA} + \vec{GB} - \vec{GA} = \vec{GB}$.

ii. Είναι $\vec{AA} = \vec{BG} = -\vec{GB} = -\vec{AE}$

β) Είναι $\vec{AA} = -\vec{AE} \Leftrightarrow \vec{AA} // \vec{AE}$ και επειδή τα διανύσματα αυτά έχουν κοινό σημείο το A, τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά.

22042. Στο σχήμα φαίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ABΓΔ με κέντρο O. Τα σημεία K, Λ, Μ χωρίζουν την πλευρά ΔΓ σε τέσσερα ίσα τμήματα. Αν $\vec{DK} = \vec{a}$ και $\vec{DL} = \vec{b}$ να εκφράσετε καθένα από τα ακόλουθα διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



α) $\vec{DK}$ **β)** $\vec{MA}$ **γ)** $\vec{OD}$

Λύση

α) Επειδή τα σημεία K, Λ, Μ χωρίζουν την πλευρά ΔΓ σε τέσσερα ίσα τμήματα, είναι $DK = KL = LM = MG$, οπότε $\vec{DK} = \vec{KL} = \vec{LM} = \vec{MG} = \vec{a}$, οπότε $\vec{DK} = 4\vec{a}$.

β) $\vec{MA} = \vec{MD} + \vec{DA} = -3\vec{a} + \vec{b}$

γ) $\vec{OD} = \vec{OL} + \vec{LD} = \frac{1}{2}\vec{b} - 2\vec{a}$

Θέμα 4ο

21885. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και Δ, Ε σημεία εσωτερικά των πλευρών AB και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\vec{AB} = \kappa \cdot \vec{AD}$ και $\vec{AG} = \lambda \cdot \vec{AE}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{AG} = \vec{b}$, τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{DE}$ και $\vec{BG}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

β) i. Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι $\vec{BG} // \vec{DE}$ και $|\vec{BG}| = \kappa |\vec{DE}|$.

ii. Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\vec{DE}$ και $\vec{BG}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί.

Λύση

α) Είναι $\vec{AB} = \kappa \cdot \vec{AD} \Leftrightarrow \vec{AD} = \frac{1}{\kappa} \vec{AB}$ και $\vec{AG} = \lambda \cdot \vec{AE} \Leftrightarrow \vec{AE} = \frac{1}{\lambda} \vec{AG}$.

$$\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{AG} - \frac{1}{\kappa} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\lambda} \vec{\beta} - \frac{1}{\kappa} \vec{\alpha}, \quad \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \vec{\alpha} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}.$$

β) i. Αν $\kappa = \lambda$ τότε $\overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{\kappa} \vec{\beta} - \frac{1}{\kappa} \vec{\alpha} = \frac{1}{\kappa} (\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = \frac{1}{\kappa} \overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \kappa \overrightarrow{\Delta E} \Rightarrow \overrightarrow{BG} // \overrightarrow{\Delta E}$ και $|\overrightarrow{BG}| = \kappa |\overrightarrow{\Delta E}|$.

ii. Αν $\kappa = \lambda = 2$ τότε $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$ και $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AE}$, δηλαδή τα Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ.

Είναι $\overrightarrow{BG} // \overrightarrow{\Delta E}$ και $|\overrightarrow{BG}| = 2|\overrightarrow{\Delta E}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{\Delta E}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BG}|$, δηλαδή αποδείξαμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που

ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς.

Συντεταγμένες διανύσματος

Θέμα 2ο

14666. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}$.

β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

γ) Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

Λύση

α) Είναι $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} = 3(1, -3) - 5(-2, -1) = (3, -9) + (10, 5) = (13, -4)$ και

$\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta} = 5(1, -3) - 9(-2, -1) = (5, -15) + (18, 9) = (23, -6)$.

β) $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v} = 2(3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}) - (5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}) = 6\vec{\alpha} - 10\vec{\beta} - 5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

γ) Είναι $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OK} = \vec{w} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και

$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} - (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} - \vec{\alpha} + \vec{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{LM} = 2\vec{\alpha} - 4\vec{\beta} = 2(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 2\overrightarrow{KL}$, άρα τα

διανύσματα $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL}$ και $\overrightarrow{KL}$ είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

15002. Δίνονται τα σημεία Α(0, 5), Δ(4, 5) και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$ και $\overrightarrow{AG} = (3, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες Γ(3, 6).

β) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

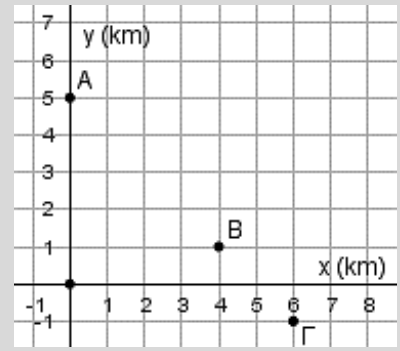
Λύση

α) Έστω ότι το Γ έχει συντεταγμένες (x, y), τότε $\overrightarrow{AG} = (x, y - 5)$. Όμως $\overrightarrow{AG} = (3, 1)$, άρα $x = 3$ και $y - 5 = 1 \Leftrightarrow y = 6$, οπότε Γ(3, 6).

β) i. $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (4 - 3, 5 - 6) = (1, -1)$

ii. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

15043. Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ.

Λύση

α) i. $\overrightarrow{AB} = (4-0, 1-5) = (4, -4)$, $\overrightarrow{B\Gamma} = (6-4, -1-1) = (2, -2)$.

ii. Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} / \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow A, B, \Gamma$ συνευθειακά σημεία.

β) Είναι $\overrightarrow{AB} = (4, -4) = 2(2, -2) = 2\overrightarrow{B\Gamma}$ άρα $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

15854. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} / \vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

Λύση

α) $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} / \vec{\beta}$.

β) $\vec{\beta} = (-8, -4) = -4(2, 1) = -4\vec{\alpha}$.

γ) $|\vec{\beta}| = |-4\vec{\alpha}| = |-4||\vec{\alpha}| = 4|\vec{\alpha}|$.

16147. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με τον θετικό ημιάξονα Ox.

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

Λύση

α) Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$ και $\lambda_{\vec{\delta}} = \frac{1}{-1} = -1$.

β) Επειδή $\lambda_{\vec{\beta}} = 0$, το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι παράλληλο στον άξονα x'x, οπότε η γωνία που σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox είναι 0° .

Στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, οπότε η γωνία που σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox είναι 90° .

Αν ω, φ οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\delta}$ αντίστοιχα με τον άξονα $x'x$, τότε $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{\vec{\alpha}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \omega = 60^\circ$ και $\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{\vec{\delta}} = -1 = -\varepsilon\varphi 45^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = \varepsilon\varphi 135^\circ \Leftrightarrow \varphi = 135^\circ$

$$\gamma) |\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}, \quad |\vec{\gamma}| = |-3| = 3.$$

16151. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$.

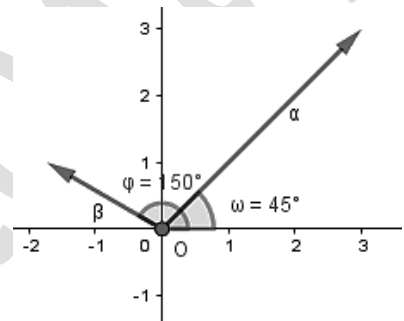
β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } \lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ και } \lambda_{\vec{\beta}} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Αν ω, φ οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα με τον άξονα $x'x$, τότε $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{\vec{\alpha}} = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$ και

$$\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{\vec{\beta}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\varepsilon\varphi 30^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = \varepsilon\varphi 150^\circ \Leftrightarrow \varphi = 150^\circ.$$



β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \varphi - \omega = 150^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.

16579. Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(6, 7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\vec{AB}$.

β) Αν $\vec{v} = \vec{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.

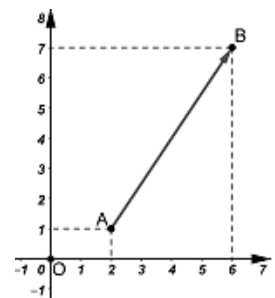
γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τους άξονες του καρτεσιανού επιπέδου και τα δύο σημεία $A(2, 1)$ και $B(6, 7)$. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\vec{AB}$ με αρχή το A και πέρας το B .

$$\beta) \vec{v} = \vec{AB} = (6 - 2, 7 - 1) = (4, 6)$$

γ) Παρατηρούμε ότι $\vec{u} = (-8, -12) = (-2 \cdot 4, -2 \cdot 6) = -2 \cdot (4, 6) = -2\vec{v}$, άρα τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι αντίρροπα.

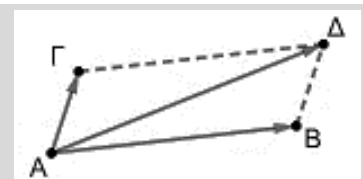


16580. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(11, 5)$, $\Gamma(3, 7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\vec{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α) των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.

β) του διανύσματος $\vec{A\Delta}$.

γ) του σημείου Δ .



Λύση

$$\alpha) \overrightarrow{AB} = (11-2, 5-4) = (9, 1), \overrightarrow{AG} = (3-2, 7-4) = (1, 3)$$

$$\beta) \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} = (9, 1) + (1, 3) = (10, 4)$$

$$\gamma) \text{Είναι } \overrightarrow{AD} = (x_D - x_A, y_D - y_A) \Leftrightarrow (10, 4) = (x_D - 2, y_D - 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = 10 \\ y_D - 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 12 \\ y_D = 8 \end{cases}, \text{ άρα } \Delta(12, 8).$$

16581. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία A(-1, 6), B(1, 2) και Γ(3, -2).

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BG}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

γ) Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AG.

Λύση

$$\alpha) \overrightarrow{AB} = (1 - (-1), 2 - 6) = (2, -4), \overrightarrow{BG} = (3 - 1, -2 - 2) = (2, -4)$$

β) Είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BG}$, επομένως τα διανύσματα είναι συγγραμμικά και εφόσον το B είναι κοινό σημείο συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

γ) Επειδή $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BG}$, συμπεραίνουμε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AG.

17070. Στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία A(3, 4), B(2, 1), Γ(3, -1) και Δ(4, 2).

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία και A, B, Γ και Δ.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{DG}$.

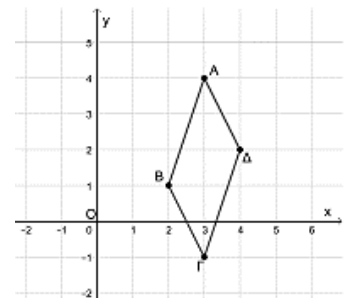
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α)

$$\beta) \overrightarrow{AB} = (2 - 3, 1 - 4) = (-1, -3), \overrightarrow{DG} = (3 - 4, -1 - 2) = (-1, -3).$$

γ) Επειδή $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DG}$ το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



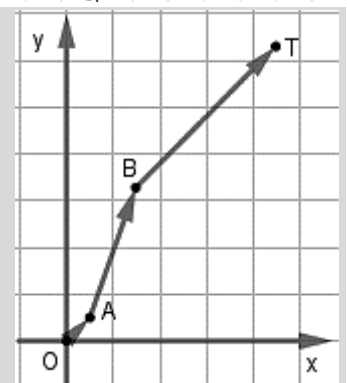
18878. Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο O) τρεις μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο A, στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο T.

Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα $\overrightarrow{OA} = (1, 1)$, $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$, $\overrightarrow{BT} = (2, 5\sqrt{3} - 5)$, όπως φαίνονται στο σχήμα.

Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT} = (5, 5\sqrt{3})$.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας.



Λύση

$$\alpha) \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = (1,1) + (2,4) + (2, 5\sqrt{3} - 5) = (5, 5\sqrt{3}).$$

$$\beta) |\overrightarrow{OT}| = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10.$$

Επομένως, η απόσταση από την κατασκήνωση είναι 10km.

19038. Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

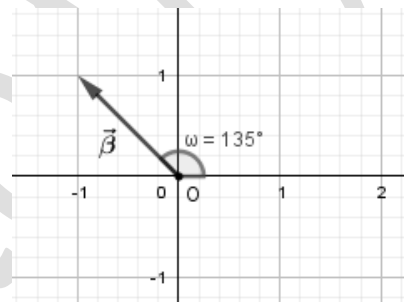
γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

Λύση

α) Είναι $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{1}{-1} = -1$, οπότε αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το

διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$, είναι $\varepsilon\omega = -1$. Επειδή το διάνυσμα

βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο είναι $\omega = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.



β) Είναι $|\vec{\gamma}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,
άρα $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

$$\gamma) \vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \Leftrightarrow (-5, -5) = \lambda(2, 3) + \mu(-1, 1) \Leftrightarrow (-5, -5) = (2\lambda - \mu, 3\lambda + \mu) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu = -5 \\ 3\lambda + \mu = -5 \end{cases} \xrightarrow{+} 5\lambda = -10 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ και } 3 \cdot (-2) + \mu = -5 \Leftrightarrow \mu = 1, \text{ άρα } \vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

21681. Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $\Gamma(2, 5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Να βρείτε το κέντρο O του παραλληλογράμμου.

Λύση

α) Έστω ότι το Δ έχει συντεταγμένες (x, y) , τότε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (2 - x, 5 - y)$, $\overrightarrow{AB} = (-3 - 1, 4 - 2) = (-4, 2)$ και
 $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (2 - x = -4 \Leftrightarrow x = 6)$ και $(5 - y = 2 \Leftrightarrow y = 3)$, άρα $\Delta(6, 3)$.

β) Επειδή $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$ το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το O είναι μέσο του $A\Gamma$ άρα $x_O = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{3}{2}$, $y_O = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{7}{2}$, άρα $O\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

22038. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, -12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 7.

Λύση

α) Επειδή το $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ ισχύει ότι $\vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$, $\lambda > 0$.

$$\text{Είναι } |\vec{\beta}| = \lambda |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow 1 = \lambda \sqrt{5^2 + (-12)^2} \Leftrightarrow 1 = 13\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{13}, \text{ άρα } \vec{\beta} = \frac{1}{13} \vec{\alpha} = \frac{1}{13} (5, -12) = \left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13} \right).$$

β) Επειδή το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$, ισχύει ότι $\vec{\gamma} = \mu \vec{\alpha}$, $\mu < 0$.

$$\text{Είναι } |\vec{\gamma}| = |\mu| |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow 7 = |\mu| \cdot 13 \Leftrightarrow \mu = -\frac{7}{13}, \text{ άρα } \vec{\gamma} = -\frac{7}{13} \vec{\alpha} = -\frac{7}{13} (5, -12) = \left(-\frac{35}{13}, \frac{84}{13} \right).$$

22044. Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(4,0)$ και $\Gamma(5,1)$.

α) Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία A , B , Γ .

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

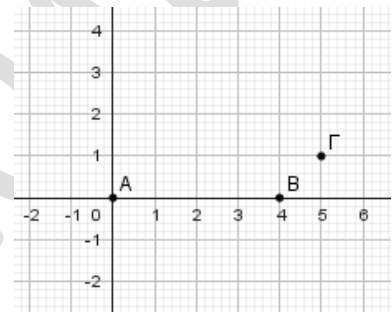
Λύση

α)

β) Έστω ότι το Δ έχει συντεταγμένες (x, y) , τότε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (5-x, 1-y)$,

$$\overrightarrow{AB} = (4-0, 0-0) = (4, 0) \text{ και}$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (5-x, 1-y) = (4, 0) \Leftrightarrow (5-x=4 \Leftrightarrow x=1) \text{ και } (1-y=0 \Leftrightarrow y=1), \text{ άρα } \Delta(1, 1).$$



22060. Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$, $\Gamma(6,2)$ και $\Delta(3,4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{BA}$ και να επιβεβαιώσετε ότι: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$;

Λύση

$$\alpha) \overrightarrow{AD} = (3-0, 4-2) = (3, 2), \overrightarrow{B\Gamma} = (6-3, 2-0) = (3, 2) = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA} = (0-3, 2-0) = (-3, 2).$$

$$\beta) |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}, |\overrightarrow{B\Gamma}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = |\overrightarrow{BA}|.$$

Επειδή $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{AD}$, το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $|\overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{BA}|$, δύο διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

22557. Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει βάση $B\Gamma$ και ύψος AO .

Η κορυφή A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές B και Γ είναι σημεία του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

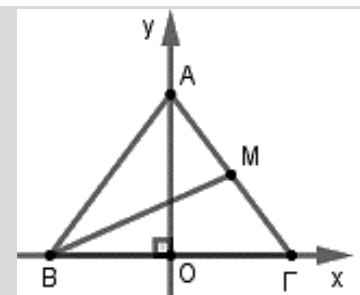
Έστω $(B\Gamma) = 12$, $(AO) = 8$ και M το μέσο της πλευράς AG .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A(0,8)$, $B(-6,0)$ και $\Gamma(6,0)$.

ii. $M(3,4)$.

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM .



Λύση

α) i) Επειδή το A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και $(OA) = 8$ είναι $y_A = 8$, επομένως $A(0,8)$. Το O είναι το μέσο του BΓ και $(BΓ) = 12$, είναι $(OB) = (OG) = 6$, άρα $B(-6,0)$ και $Γ(6,0)$.

ii) Οι συντεταγμένες του μέσου της πλευράς είναι: $x_M = \frac{x_A + x_Γ}{2} = \frac{0+6}{2} = 3$, $y_M = \frac{y_A + y_Γ}{2} = \frac{8+0}{2} = 4$, άρα $M(3,4)$.

β) Είναι $(BM) = \sqrt{(3+6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{97}$.

Θέμα 4ο

17076. Δίνονται τα σημεία $A(-3,-1)$, $B(0,3)$ και $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AM}$, $\vec{MB}$ και $\vec{AB}$.

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{AM}$, $\vec{MB}$ και $\vec{AB}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $|\vec{AM}| + |\vec{MB}| \geq 5$.

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4$.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) $\vec{AM} = (x - (-3), y - (-1)) = (x+3, y+1)$, $\vec{MB} = (0-x, 3-y) = (-x, 3-y)$

$\vec{AB} = (0 - (-3), 3 - (-1)) = (3, 4)$.

β) $|\vec{AM}| = \sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2}$, $|\vec{MB}| = \sqrt{x^2 + (3-y)^2}$ και $|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

γ) Είναι $|\vec{AB}| = |\vec{AM} + \vec{MB}| \Leftrightarrow |\vec{AM} + \vec{MB}| = 5$, όμως $|\vec{AM} + \vec{MB}| \leq |\vec{AM}| + |\vec{MB}|$, άρα $5 \leq |\vec{AM}| + |\vec{MB}|$.

δ) $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4 \Leftrightarrow |\vec{AM}| + |\vec{MB}| = 4$ άτοπο, οπότε δεν υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) ώστε να ισχύει $|\vec{AM}| + |\vec{MB}| = 4$.

17077. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j}$ και $\vec{OB} = (\lambda+1)\vec{i} + (\lambda+3)\vec{j}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} = (\lambda-1)\vec{i} + 3\vec{j}$.

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ.

γ) Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5;

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (\lambda+1)\vec{i} + (\lambda+3)\vec{j} - 2\vec{i} - \lambda\vec{j} = (\lambda-1)\vec{i} + 3\vec{j}$.

$$\beta) (AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\lambda-1)^2 + 3^2} = \sqrt{(\lambda-1)^2 + 9}.$$

$$\gamma) (AB) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2 + 9} = 5 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 16 \Leftrightarrow \lambda-1 = \pm 4 \Leftrightarrow (\lambda = 5) \text{ ή } (\lambda = -3).$$

δ) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $(\lambda-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 + 9 \geq 9 \Leftrightarrow (AB) \geq 9$ άρα η απόσταση AB έχει ελάχιστη τιμή το 9 όταν $\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$. Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Θέμα 2ο

14586. Δίνονται τα σημεία A(1,2), B(3,4) και Γ(5,-2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

β) Αν M είναι το μέσο του BΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{BG}$.

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{BG}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{AM}$.

Λύση

$$\alpha) \overrightarrow{AB} = (3-1, 4-2) = (2, 2), \overrightarrow{AG} = (5-1, -2-2) = (4, -4).$$

$$\text{Είναι } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 2 \cdot 4 + 2(-4) = 8 - 8 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ.$$

$$\beta) \text{Είναι } x_M = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} = 4, y_M = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = 1, \text{ άρα } M(4, 1).$$

$$\text{Είναι } |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ και } |\overrightarrow{BG}| = \sqrt{(5-3)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\gamma) \text{Είναι } \overrightarrow{BG} = (5-3, -2-4) = (2, -6), \overrightarrow{AM} = (4-1, 1-2) = (3, -1).$$

$$\text{Έστω } \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \text{ με } \overrightarrow{BG} = \kappa \overrightarrow{AG} + \lambda \overrightarrow{AM}, \text{ τότε } (2, -6) = \kappa(4, -4) + \lambda(3, -1) \Leftrightarrow (2, -6) = (4\kappa + 3\lambda, -4\kappa - \lambda) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\kappa + 3\lambda = 2 \\ -4\kappa - \lambda = -6 \end{cases} \xrightarrow{+} 2\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ και } 4\kappa + 3(-2) = 2 \Leftrightarrow 4\kappa - 6 = 2 \Leftrightarrow 4\kappa = 8 \Leftrightarrow \kappa = 2, \text{ άρα}$$

$$\overrightarrow{BG} = -2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AG}.$$

14953. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ με A(-2, 5), B(7, 8), Γ(1, -4).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία BΑΓ.

Λύση

$$\alpha) \overrightarrow{AB} = (7+2, 8-5) = (9, 3), \overrightarrow{AG} = (1+2, -4-5) = (3, -9).$$

$$\beta) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 9 \cdot 3 + 3 \cdot (-9) = 27 - 27 = 0.$$

$$\gamma) \text{Επειδή } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \text{ είναι } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AG}, \text{ οπότε } \angle B\hat{A}\Gamma = 90^\circ.$$

15038. Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$.

Λύση

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$

β) $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 9$ και $\vec{\beta}^2 = |\vec{\beta}|^2 = 16$.

γ) $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 3\vec{\alpha}^2 - 9\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 = 3 \cdot 9 - 10 \cdot 6 + 3 \cdot 16 = 15$.

15073. Δίνονται τα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

Λύση

α) $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2(1, 2) + (2, 3) = (4, 7)$.

β) $|\vec{\gamma}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$.

γ) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 18$.

15186. Δίνονται τα σημεία A(2,1), B(6,3), Δ(1, -2) και Γ(9,2). Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες (4,2) και το μέσο N του τμήματος ΓΔ έχει συντεταγμένες (5,0).

β) $\overrightarrow{MN} = (1, -2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8, 4)$.

γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Λύση

α) Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 4$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2$, άρα M(4,2).

Είναι $x_N = \frac{x_\Gamma + x_\Delta}{2} = 5$, $y_N = \frac{y_\Gamma + y_\Delta}{2} = 0$, άρα N(5,0).

β) $\overrightarrow{MN} = (5 - 4, 0 - 2) = (1, -2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (9 - 1, 2 + 2) = (8, 4)$

γ) Είναι $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 8 - 8 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

15252. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{AG} = (3, -1)$.

- α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{BG} = (1, -2)$.
 β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.
 γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

Λύση

α) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = (3, -1) - (2, 1) = (3 - 2, -1 - 1) = (1, -2)$.

β) Είναι $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{AG}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ και $|\overrightarrow{BG}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

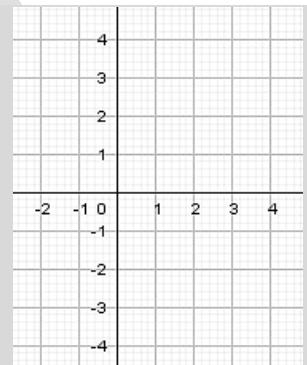
Επειδή $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BG}|$ το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

Είναι $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BG}|^2 = 5 + 5 = 10 = |\overrightarrow{AG}|^2$, οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ.

γ) Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Β, ισχύει ότι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BG}| = \frac{1}{2} (\sqrt{5})^2 = \frac{5}{2}$.

15317. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3, 0)$ και $\vec{w} = (-3, 4)$.

- α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.
 β) i. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$
 ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

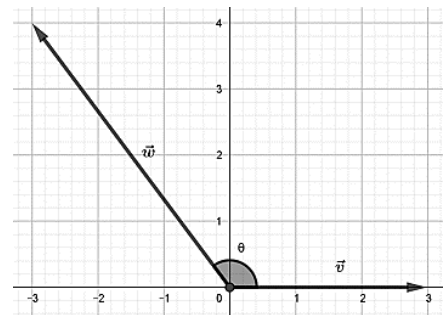


Λύση

α) Είναι $\det(\vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ δεν είναι παράλληλα.

β) i.

ii. Με βάση το σχήμα στο βi) ερώτημα, η γωνία θ που σχηματίζουν τα διανύσματα είναι αμβλεία.



15379. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 3)$, $\vec{\beta} = (3, -1)$. Να υπολογίσετε:

- α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.
 β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Λύση

α) Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (1, 3)$ έχει $x_1 = 1$ και $y_1 = 3$. Το διάνυσμα $\vec{\beta} = (3, -1)$ έχει $x_2 = 3$ και $y_2 = -1$.

Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 3 - 3 = 0$.

Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow (\hat{\vec{\alpha}}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{2}$.

β) Είναι $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2(1,3) - (3,-1) = (2,6) - (3,-1) = (-1,7)$.

15463. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (2,1)$ και $\vec{AG} = (3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{BG} = (1,-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} \perp \vec{BG}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $|\vec{AB}| = |\vec{BG}|$.

Λύση

α) $\vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB} = (3,-1) - (2,1) = (3-2, -1-1) = (1,-2)$.

β) $\vec{AB} \cdot \vec{BG} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{BG}$.

γ) $|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $|\vec{BG}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, άρα $|\vec{AB}| = |\vec{BG}|$.

15658. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,-2)$ και $\vec{\beta} = (1,1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $K(2,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

β) Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(4,-1)$ και $B(3,2)$.

ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$.

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και $|\vec{KG}| = \frac{1}{2}|\vec{AB}|$.

Λύση

α) Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 2 - 2 = 0$, άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

β) i. Είναι $\vec{\alpha} = \vec{KA} \Leftrightarrow (2,-2) = (x_A - x_K, y_A - y_K) \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 2 = 2 \\ y_A - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 4 \\ y_A = -1 \end{cases}$, άρα $A(4,-1)$.

Είναι $\vec{\beta} = \vec{KB} \Leftrightarrow (1,1) = (x_B - x_K, y_B - y_K) \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 2 = 1 \\ y_B - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3 \\ y_B = 2 \end{cases}$, άρα $B(3,2)$.

ii. Είναι $\vec{AB} = (3-4, 2+1) = (-1,3)$ και $\vec{AG} = (x_\Gamma - 4, y_\Gamma + 1)$

Επειδή τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ είναι παράλληλα, οπότε:

$$\det(\vec{AB}, \vec{AG}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x_\Gamma - 4 & y_\Gamma + 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -y_\Gamma - 1 - 3x_\Gamma + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x_\Gamma + y_\Gamma = 11.$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } |\vec{KG}| &= \frac{1}{2}|\vec{AB}| \Leftrightarrow \sqrt{(x_\Gamma - 2)^2 + (y_\Gamma - 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(4-3)^2 + (2+1)^2} \Leftrightarrow \sqrt{(x_\Gamma - 2)^2 + (y_\Gamma - 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \Leftrightarrow \\ (x_\Gamma - 2)^2 + (y_\Gamma - 1)^2 &= \frac{1}{4} \cdot 10 \Leftrightarrow x_\Gamma^2 - 4x_\Gamma + 4 + (11 - 3x_\Gamma - 1)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x_\Gamma^2 - 4x_\Gamma + 4 + (10 - 3x_\Gamma)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$x_{\Gamma}^2 - 4x_{\Gamma} + 4 + 100 - 60x_{\Gamma} + 9x_{\Gamma}^2 - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 10x_{\Gamma}^2 - 64x_{\Gamma} + \frac{203}{2} = 0 \quad (1).$$

Η (1) είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 36$ και ρίζες $x_1 = \frac{7}{2} = 3,5$, $x_2 = \frac{29}{10} = 2,9$.

Επειδή το Γ είναι εσωτερικό του τμήματος AB , η τετμημένη του θα πρέπει να είναι μεταξύ 3 και 4.

Άρα $x_{\Gamma} = 3,5$ και $3 \cdot 3,5 + y_{\Gamma} = 11 \Leftrightarrow y_{\Gamma} = 0,5$.

15825. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

γ) Να βρείτε τη $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$.

Λύση

α) Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2 \cdot 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

β) Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

γ) Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\gamma} \Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{2}$.

15852. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 2)$, $\vec{\beta} = (-2, 1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$.

Λύση

α) $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = 2(3, 2) + 3(-2, 1) = (6, 4) + (-6, 3) = (0, 7)$.

β) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -6 + 2 = -4$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

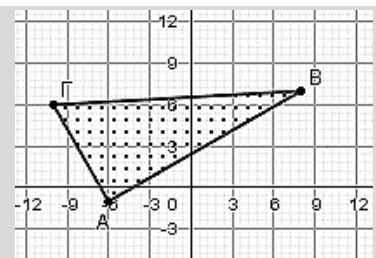
γ) $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 7 = 14$.

15996. Δίνονται τα σημεία $A(-6, -1)$, $B(8, 7)$, $\Gamma(-10, 6)$,

τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\vec{AB} + \vec{B\Gamma}$.

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.



Λύση

α) $\vec{AB} = (8 - (-6), 7 - (-1)) = (14, 8)$, $\vec{B\Gamma} = (-10 - 8, 6 - 7) = (-18, -1)$ και

$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = (14, 8) + (-18, -1) = (-4, 7)$.

β) Είναι $\overrightarrow{AG} = (-10 - (-6), 6 - (-1)) = (-4, 7)$ και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 14 \cdot (-4) + 8 \cdot 7 = -56 + 56 = 0$, άρα $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AG}$, οπότε η γωνία Α είναι ορθή.

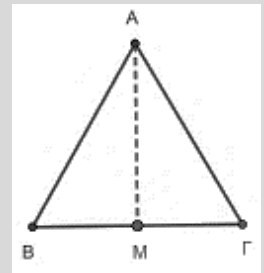
16141. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

- i. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$ ii. $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BG})$ iii. $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{GA})$
iv. $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{GM})$ v. $(\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{GB})$

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

- i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BG}$ ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GA}$ iii. $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GB}$



Λύση

α) i. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 60^\circ$.

ii. $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BG}) = 90^\circ$.

iii. $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{GA}) = 180^\circ - \angle MAG = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. iv. $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{GM}) = 180^\circ$ (είναι αντίρροπα).

v. $(\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{GB}) = 0^\circ$ (είναι ομόρροπα).

β) i. $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$

ii. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε:

$$AM^2 = AG^2 - MG^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \Leftrightarrow AM = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GA} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{GA}| \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{GA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GA} = 5\sqrt{3} \cdot 10 \cos 150^\circ = 50\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -75.$$

iii. $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GB} = |\overrightarrow{GM}| \cdot |\overrightarrow{GB}| = 5 \cdot 10 = 50.$

16144. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\hat{A} = 60^\circ$.

Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

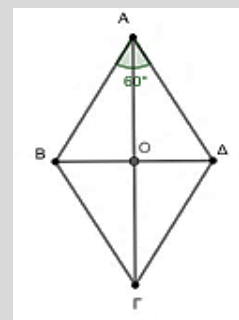
α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

β) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG}$

γ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO}$

δ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$

ε) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GD}$



Λύση

α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8.$

β) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BG}| \cdot \cos 0 = 4 \cdot 4 = 16$

γ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO} = 0$ γιατί $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AO}$.

δ) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ έχει ΑΒ=ΑΔ και Α = 60°, το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, οπότε ΒΔ = ΑΒ = ΑΔ = 4.

Το Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, οπότε ΒΟ = ΟΔ = 2.

$$\overrightarrow{ΟΔ} \cdot \overrightarrow{ΟΒ} = |\overrightarrow{ΟΔ}| \cdot |\overrightarrow{ΟΒ}| \cos 180^\circ = 2 \cdot 2(-1) = -4.$$

$$\varepsilon) \overrightarrow{ΑΔ} \cdot \overrightarrow{ΓΔ} = |\overrightarrow{ΑΔ}| \cdot |\overrightarrow{ΓΔ}| \cos 120^\circ = 4 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8.$$

16426. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$.

Λύση

$$\alpha) \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2|\vec{\alpha}|^2 - (2 \cdot (-3) - 1 \cdot 2) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 2\left(\sqrt{2^2 + (-1)^2}\right)^2 - (-8) = 2 \cdot 5 + 8 = 18.$$

β) Έστω $\vec{\gamma} = (x, y)$, τότε: $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$ (1) και

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x^2 + (2x)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 = 5 \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Αν $x = 1$ τότε $y = 2$ και $\vec{\gamma} = (1, 2)$, ενώ αν $x = -1$ τότε $y = -2$ και $\vec{\gamma} = (-1, -2)$.

16427. Δίνονται τα σημεία Α(-2, 3), Β(0, 8), Γ(5, 3) και Δ(10, 5). Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{ΑΒ} \cdot \overrightarrow{ΓΔ}$.

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΔ}$ με τον άξονα x'x.

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } \overrightarrow{ΑΒ} = (0 - (-2), 8 - 3) = (2, 5), \overrightarrow{ΓΔ} = (10 - 5, 5 - 3) = (5, 2) \text{ και } \overrightarrow{ΑΒ} \cdot \overrightarrow{ΓΔ} = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 20.$$

$$\beta) \vec{u} = \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = (5, 2) + (2, 5) = (7, 7).$$

$$\text{Είναι } \lambda_{\vec{u}} = \frac{7}{7} = 1 \text{ επομένως } \varepsilon\varphi\omega = 1, \text{ άρα } \omega = \frac{\pi}{4}.$$

16428. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Λύση

$$\alpha) |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \Leftrightarrow |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$$

$$9\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$$

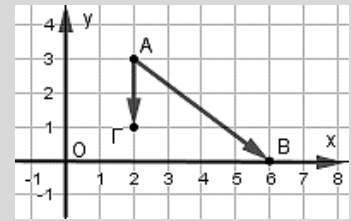
$$8\vec{\alpha}^2 + 16\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow 16\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 16\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8 \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow 16\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -6 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}.$$

$$\beta) \cos(\hat{\vec{a}}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|} = \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = -\frac{12}{8\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin 30^\circ, \text{ άρα } (\hat{\vec{a}}, \vec{\beta}) = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

17075. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ του καρτεσιανού επιπέδου.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4, -3)$ και $\overrightarrow{AG} = (0, -2)$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.



Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι $A(2, 3)$, $B(6, 0)$ και $G(2, 1)$.

Είναι $\overrightarrow{AB} = (6 - 2, 0 - 3) = (4, -3)$ και $\overrightarrow{AG} = (2 - 2, 1 - 3) = (0, -2)$.

β) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 4 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) = 6$.

20685. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{w} = (-10, 2)$ και τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(\beta, 0)$, $G(0, \gamma)$.

Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{AG}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AG}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$.

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (\beta + 1, -2)$ και $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \beta + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$.

Είναι $\overrightarrow{AG} = (0 + 1, \gamma - 2) = (1, \gamma - 2)$ και

β) $\vec{w} \parallel \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \det(\vec{w}, \overrightarrow{AG}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 1 & \gamma - 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -10(\gamma - 2) - 2 = 0 \Leftrightarrow$
 $-10\gamma + 20 - 2 = 0 \Leftrightarrow -10\gamma = -18 \Leftrightarrow \gamma = \frac{9}{5}$.

γ) Για $\beta = 1$ και $\gamma = \frac{9}{5}$ είναι $\overrightarrow{AB} = (2, -2)$ και $\overrightarrow{AG} = \left(1, -\frac{1}{5}\right)$.

Είναι $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$

20732. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διάνυσμα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}| = 4|\vec{a}|$.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να δείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} < 0$.

Λύση

$$\alpha) \vec{\beta} = (-8, -4) = -4(2, 1) = -4\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}, \vec{\beta} = -4\vec{\alpha} \Rightarrow |\vec{\beta}| = |-4\vec{\alpha}| = 4|\vec{\alpha}|.$$

$$\beta) \text{ Επειδή } \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \text{ είναι } (\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = 180^\circ.$$

$$\gamma) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot (-8) + 1 \cdot (-4) = -16 - 4 = -20 < 0.$$

20733. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $\vec{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{BG}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ είναι κάθετα.

Λύση

$$\alpha) \vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} - (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2\vec{\beta}.$$

$$\beta) \vec{AB} \cdot \vec{AG} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 0.$$

$$\gamma) \vec{AB} \cdot \vec{AG} = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{AG}.$$

20773. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

β) Αν $\vec{u} = (4, -1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = (1, \kappa)$.

γ) Για $\kappa = 4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση

$$\alpha) \vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2(1, -2) + (2, 3) = (4, -1).$$

$$\beta) \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 1 - 1 \cdot \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 4.$$

$$\gamma) \text{ Για } \kappa = 4 \text{ είναι } \vec{v} = (1, 4) \text{ και } |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}.$$

20888. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ και

$\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

Λύση

$$\alpha) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \frac{2\pi}{3} = 4 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -10.$$

$$\beta) |\vec{\gamma}|^2 = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 + 12(-10) + 9|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$$

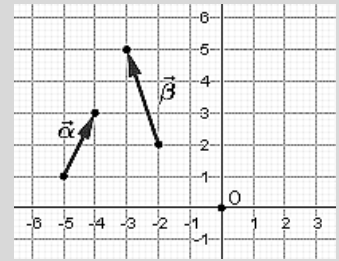
$$|\vec{\gamma}|^2 = 4 \cdot 16 - 120 + 9 \cdot 25 = 169 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}| = 13.$$

20914. Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

α) Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$ όπου O η αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$ και $\vec{AB}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.



Λύση

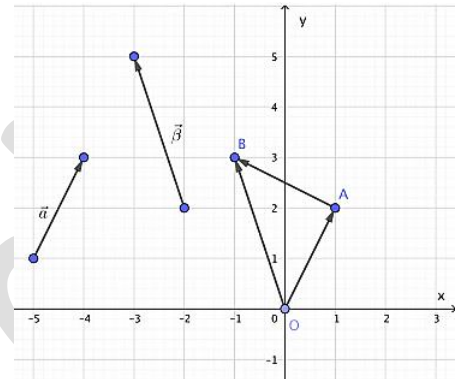
α)

$$\vec{\alpha} = \vec{OA} = (1, 2), \quad \vec{\beta} = \vec{OB} = (-1, 3),$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-1, 3) - (1, 2) = (-2, 1)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{AB} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{AB} = -2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \vec{OA} \perp \vec{AB},$$

άρα το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.



21682. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (11, 2)$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-5, -10)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$.

Λύση

α) Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (11, 2)$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-5, -10)$ προκύπτει:

$$2\vec{\alpha} = (11, 2) + (-5, -10) \Leftrightarrow 2\vec{\alpha} = (6, -8) \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \frac{1}{2}(6, -8) = (3, -4).$$

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} + \vec{\beta} = (11, 2) \Leftrightarrow \vec{\beta} = (11, 2) - \vec{\alpha} = (11, 2) - (3, -4) = (8, 6).$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3 \cdot 8 + (-4) \cdot 6 = 24 - 24 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}.$$

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10, \quad |\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5, \quad \text{άρα } |\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|.$$

22040. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-4, 3)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

Λύση

$$\text{α) Έστω } \vec{\beta} = (x, y), \text{ τότε } \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow -4x + 3y = 0 \Leftrightarrow 3y = 4x \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x.$$

Για $x=3$ είναι $y=4$, οπότε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ είναι το $\vec{\beta} = (3, 4)$.

$$\text{β) Έστω } \vec{\gamma} = (x_1, y_1), \text{ τότε } |\vec{\gamma}| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad (1).$$

$$\text{Είναι } \vec{\gamma} \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow -4x_1 + 3y_1 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \frac{4}{3}x_1 \quad (2).$$

Από τις (1), (2) έχουμε: $x_1^2 + \left(\frac{4}{3}x_1\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + \frac{16}{9}x_1^2 = 1 \Leftrightarrow 9x_1^2 + 16x_1^2 = 9 \Leftrightarrow 25x_1^2 = 9 \Leftrightarrow$

$$x_1^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow x_1 = \pm \frac{3}{5}.$$

Για $x_1 = \frac{3}{5}$ είναι $y_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$, οπότε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι το $\vec{\gamma} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

22170. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3), \vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

Λύση

α) $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = (-1, 3) - 2\left(-2, -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \vec{u} = (-1, 3) + (4, 1) = (-1 + 4, 3 + 1) = (3, 4).$

β) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0$

Η εξίσωση έχει $\Delta = 64$ και ρίζες $x = \frac{2}{3}, x = -2$.

γ) $\vec{v} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{v}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - (-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

22554. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy , με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $\vec{x}, \vec{y}$ τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\vec{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$.

Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε $\vec{OM} = \frac{1}{5}(2\vec{OA} - \vec{OB})$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$.

ii. $\vec{OM} = \vec{j}$.

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{OM}$.

Λύση

α) i. $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 6\vec{i} - \vec{j} - (3\vec{i} + 2\vec{j}) = 6\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$

ii. $\vec{OM} = \frac{1}{5}(2\vec{OA} - \vec{OB}) \Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{1}{5}(2(3\vec{i} + 2\vec{j}) - (6\vec{i} - \vec{j})) = \frac{1}{5}(6\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{5} \cdot 5\vec{j} = \vec{j}$

β) Είναι $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j} = (3, -3)$ και $\vec{OM} = \vec{j} = (0, 1)$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{OM} = 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3.$$

4ο Θέμα

15042. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο του επιπέδου M , τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ, M είναι συνευθειακά.

β) Να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσο του $B\Gamma$.

γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \kappa$ και $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda$.

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες.

Λύση

α) $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{M\Gamma}$ άρα $\overrightarrow{MB} // \overrightarrow{M\Gamma}$ οπότε τα σημεία M, B, Γ είναι συνευθειακά.

β) $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{M\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{GM}$ άρα το M είναι μέσο του $B\Gamma$.

γ) i. Επειδή τα A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου δεν είναι συνευθειακά, οπότε ότι τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα.

Είναι $\kappa \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

Αν $\kappa \neq 0$ τότε $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{\lambda}{\kappa} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A\Gamma}$ άτοπο, άρα $\kappa = 0$.

Αν $\lambda \neq 0$ τότε $\lambda \overrightarrow{AB} = \kappa \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{\kappa}{\lambda} \overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A\Gamma}$ άτοπο άρα $\lambda = 0$. Επομένως $\kappa = \lambda = 0$.

ii. Επειδή $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \kappa = 0$ είναι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma}$ επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A .

Είναι $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$, δηλαδή η διάμεσος AM του ορθογώνιου τριγώνου είναι κάθετη στην πλευρά $B\Gamma$, δηλαδή είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

15320. Δίνεται παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, όπου $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $|\overrightarrow{OG}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$.

ii. $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$.

β) Αν $|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AB}|$, να δείξετε ότι το $OAGB$ είναι ορθογώνιο.

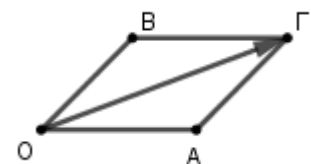
Λύση

α) i. Από τον κανόνα παραλληλογράμμου είναι $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$,

οπότε $|\overrightarrow{OG}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ και

$$|\overrightarrow{OG}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OG}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2.$$

ii. $|\overrightarrow{AB}|^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2.$



β) Αν $|\vec{OG}| = |\vec{AB}|$ τότε το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ έχει ίσες διαγώνιες και είναι ορθογώνιο.

18520.α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:

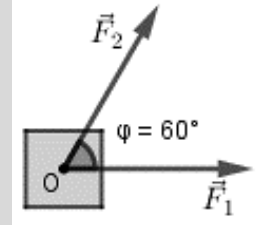
$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (1)$$

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$.

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι 60° .

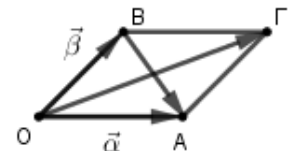


Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 &= (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 + (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 + \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \\ |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 &= 2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\beta}^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2. \end{aligned}$$

β) i. Από τον κανόνα παραλληλογράμμου είναι $\vec{OG} = \vec{OB} + \vec{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$.



ii. Το άθροισμα των τετραγώνων των διαγώνιων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων δύο διαδοχικών πλευρών του.

γ) Είναι $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 10$.

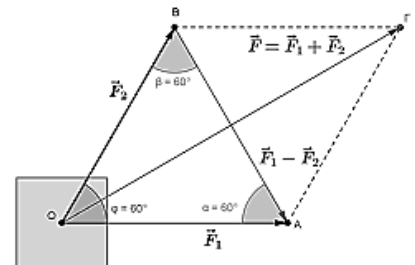
Αν $\vec{F}$ η συνισταμένη δύναμη των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ τότε $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$,

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| \text{ και}$$

$$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2|^2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2 \Leftrightarrow |\vec{F}|^2 = \vec{F}_1^2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + \vec{F}_2^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2|^2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2 = |\vec{F}_1|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos 60^\circ + |\vec{F}_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{F}|^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} + 10^2 = 300 \Leftrightarrow |\vec{F}| = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \text{ N.}$$



18547. Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda - 2, \lambda - 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

i. Τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου.

ii. Το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

β) Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ABΓ.

Λύση

α) i. Για να σχηματίζουν τα σημεία A, B και Γ τρίγωνο πρέπει τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{AG}$ να μην είναι παράλληλα. Είναι $\vec{AB} = (\lambda - 0, 1 + 1) = (\lambda, 2)$ και $\vec{AG} = (\lambda - 2 - 0, \lambda - 3 + 1) = (\lambda - 2, \lambda - 2)$.

Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}$ δεν είναι παράλληλα όταν $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda(\lambda-2)-2(\lambda-2) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-2) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2.$$

ii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A όταν $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda(\lambda-2)+2(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)=0 \Leftrightarrow (\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=2 \text{ απορρίπτεται}) \text{ ή } (\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=-2).$$

β) i. Για $\lambda=-2$ είναι $\overrightarrow{AB}=(-2,2), \overrightarrow{AG}=(-4,-4)$ και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}=0$.

ii. Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 8+8=16$ και $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})| = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

20938. Θεωρούμε τρίγωνο OAB , με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = (6,8)$. Για το διάνυσμα $\vec{a}$ γνωρίζουμε ότι $\vec{a} = (|\vec{a}|-4, |\vec{a}|-2)$

α) Να δείξετε ότι $|\vec{a}| = 2$.

β) Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο $OAGB$ να αποτελεί παραλληλόγραμμο.

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά OA με τη διαγώνιο AB του παραλληλογράμμου $OAGB$.

Λύση

$$\alpha) |\vec{a}| = \sqrt{(|\vec{a}|-4)^2 + (|\vec{a}|-2)^2} \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 - 8|\vec{a}| + 16 + |\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}| + 4 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}| + 20 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 64$ και ρίζες $|\vec{a}| = 10$ ή $|\vec{a}| = 2$.

Αν $|\vec{a}| = 10$, τότε $\vec{a} = (10-4, 10-2) = (6,8) = \overrightarrow{OB}$ απορρίπτεται γιατί τα σημεία A, B ταυτίζονται και δεν ορίζουν τρίγωνο.

$$\text{Αν } |\vec{a}| = 2, \text{ τότε } \vec{a} = (2-4, 2-2) = (-2,0), \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0, \text{ δεκτό αφού τα σημεία } O, A, B$$

ορίζουν τρίγωνο.

β) Έστω $\Gamma(x, y)$. Επειδή $\overrightarrow{OB} = (6,8)$, είναι $B(6,8)$.

Το τετράπλευρο $OAGB$ είναι παραλληλόγραμμο όταν

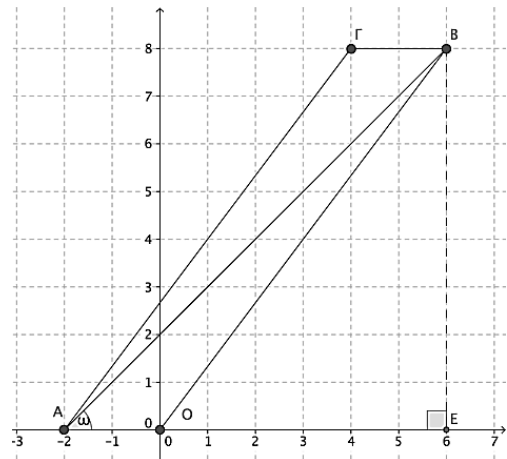
$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow$$

$$(x-6, y-8) = (-2, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x-6 = -2 \\ y-8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}, \text{ άρα}$$

$\Gamma(4, 8)$.

γ) Είναι $\overrightarrow{AO} = (2,0)$ και

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (6,8) - (-2,0) = (8,8)$$



$$\sin(\widehat{AO, AB}) = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{2 \cdot 8 + 0 \cdot 8}{\sqrt{2^2 + 0^2} \cdot \sqrt{8^2 + 8^2}} = \frac{16}{2\sqrt{2} \cdot 64} = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow (\widehat{AO, AB}) = 45^\circ.$$

22063.α) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$.

ii) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

β) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$.

ii) $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

iii) $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$.

Λύση

α) i. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = (|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|)^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$
 $\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 + 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$.

ii) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = (|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|)^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$
 $\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 - 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

β) i. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = -\vec{\beta} \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\gamma}| = |-\vec{\beta}| = |\vec{\beta}| = 2$, όμως $|\vec{\alpha}| + |\vec{\gamma}| = 1 + 1 = 2$, άρα
 $|\vec{\alpha} + \vec{\gamma}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\gamma}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$.

ii. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma} \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |-\vec{\gamma}| = |\vec{\gamma}| = 1$, όμως $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| = |1 - 2| = 1$, άρα
 $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

iii. Επειδή $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}|$, είναι $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$. Επειδή $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\alpha}$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$, είναι $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$.

22064.α) Αν $\vec{AB}$, $\vec{AG}$, $\vec{AD}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$ και $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$:

i) είναι αριθμοί ή διανύσματα;

ii) μπορούν να συγκριθούν;

β) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

ii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

iii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

γ) Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος

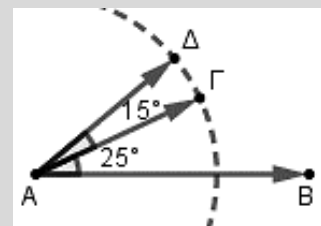
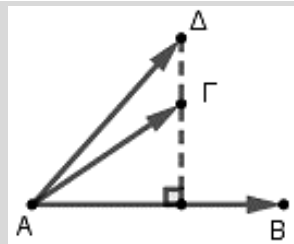
(η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο A) να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

ii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

iii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Λύση

α) i. είναι αριθμοί

ii. επειδή είναι αριθμοί μπορούν να συγκριθούν.

β) Σωστή είναι η iii, γιατί $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{A\Delta}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ που ισχύει.

γ) Επειδή τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο κέντρου Α, είναι $|\overrightarrow{A\Gamma}| = |\overrightarrow{A\Delta}| = \rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου. Είναι $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{A\Gamma}| \cdot \cos 25^\circ = |\overrightarrow{AB}| \cdot \rho \sin 25^\circ$,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{A\Delta}| \cdot \cos 40^\circ = |\overrightarrow{AB}| \cdot \rho \sin 40^\circ.$$

$$\text{Είναι } \sin 25^\circ > \sin 40^\circ \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| \cdot \rho \sin 25^\circ > |\overrightarrow{AB}| \cdot \rho \sin 40^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} > \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}.$$

Σωστή απάντηση είναι η i.

3ο Θέμα

18243. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$.

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$.

δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$.

Λύση

$$\alpha) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

$$\beta) \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 = 2 \cdot 4 - 4 - 16 = -12.$$

$$\gamma) |\vec{\gamma}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 8 + |\vec{\beta}|^2 = 4 - 8 + 16 = 12 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$|\vec{\delta}|^2 = (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 + 16 + |\vec{\beta}|^2 = 16 + 16 + 16 = 48 \Leftrightarrow |\vec{\delta}| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

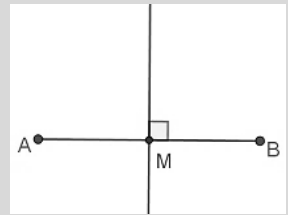
$$\delta) \cos(\vec{\gamma}, \vec{\delta}) = \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\gamma}| |\vec{\delta}|} = \frac{-12}{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}} = -\frac{3}{2(\sqrt{3})^2} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\vec{\gamma}, \vec{\delta}) = 120^\circ.$$

Η Ευθεία στο επίπεδο

Εξίσωση ευθείας

2ο Θέμα

15027. Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3, 5)$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB.
 β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB.
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετου του τμήματος AB.

Λύση

α) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{5+1}{3-1} = 3$.

β) Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$, άρα $M(2, 2)$.

γ) Αν μ η μεσοκάθετος του AB, τότε $\lambda_{AB} \lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow 3\lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow \lambda_\mu = -\frac{1}{3}$.

Η ευθεία μ έχει εξίσωση: $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$.

15044. Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$ και $B(6, -1)$.

- α) i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B.
 ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB, είναι το σημείο $M(3, 2)$.
 β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ϵ) του ευθύγραμμου τμήματος AB.

Λύση

α) i. $\lambda_{AB} = \frac{-1-5}{6-0} = -1$

ii. Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+6}{2} = 3$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$, άρα $M(3, 2)$.

β) Έστω μ η μεσοκάθετη του τμήματος AB. Τότε $\lambda_\mu \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\mu = 1$ και η μ έχει εξίσωση:
 $y - 2 = x - 3 \Leftrightarrow y = x - 1$.

15271. Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(-13, -7)$.

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B.
 β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B έχει εξίσωση $y = x + 5$.
 γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB.

Λύση

α) $\lambda_{AB} = \frac{6-2}{1+3} = 1$.

β) Η ευθεία AB έχει εξίσωση: $y - 6 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x + 5$.

γ) Το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία AB αν και μόνο αν: $-7 = -13 + 5 \Leftrightarrow -7 = -8$ αδύνατο.
Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB.

15986. Δίνονται τα σημεία A(1,1) και B(2,3).

α) i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η (ε): $y = 2x - 1$.

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Γ (2^{100} , 5) ανήκει στην ευθεία (ε).

Λύση

α) i. $\lambda_{AB} = \frac{3-1}{2-1} = 2$.

ii. Η ευθεία AB έχει εξίσωση: $y - 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$

β) Το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία AB αν και μόνο αν: $5 = 2 \cdot 2^{100} - 1 \Leftrightarrow 6 = 2^{101}$ αδύνατο.
Άρα το σημείο Γ δεν ανήκει στην AB.

16002. Σε τρίγωνο ABΓ είναι A(3, -2) και Γ(5, 2). Αν το σημείο $M\left(3, \frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της BΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι B(1, -1).

β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς BΓ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ.

Λύση

α) $x_M = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{5 + x_B}{2} \Leftrightarrow 6 = 5 + x_B \Leftrightarrow x_B = 1$ και

$y_M = \frac{y_\Gamma + y_B}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2 + y_B}{2} \Leftrightarrow 2 + y_B = 1 \Leftrightarrow y_B = -1$, άρα B(1, -1).

β) $(B\Gamma) = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

γ) Είναι $y + 2 = \frac{2+2}{5-3}(x-3) \Leftrightarrow y = 2x - 6 - 2 \Leftrightarrow y = 2x - 8$.

18236. Σε τρίγωνο ABΓ είναι A(-1, 5) και B(2, 1). Αν οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1: y = -x + 4$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι Γ(4, 0).

β) Να βρείτε:

i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ

ii. την εξίσωση του ύψους ΒΔ.

Λύση

α) Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και προσδιορίζεται από τη λύση του αντίστοιχου

συστήματος. Είναι: $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ -x + 4 = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ -2x + 8 = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ -2x + x = 4 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ -x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 + 4 = 0 \\ x = 4 \end{cases}, \text{ άρα } \Gamma(4,0).$$

β) i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι $\lambda_{AG} = \frac{0-5}{4+1} = -1$.

ii. Το ύψος ΒΔ είναι κάθετο στην πλευρά ΑΓ, οπότε $\lambda_{AG} \cdot \lambda_{BD} = -1 \Leftrightarrow -\lambda_{BD} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{BD} = 1$.
Επομένως η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι: $y - 1 = x - 2 \Leftrightarrow y = x - 1$.

18351. Δίνονται τα σημεία Α(-1,5), Β(3,3). Να υπολογίσετε:

α) Τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

γ) Την εξίσωση της μεσοκάθετου (η) του τμήματος ΑΒ.

Λύση

α) Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$, άρα Μ(1,4).

β) $\lambda_{AB} = \frac{3-5}{3+1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

γ) Έστω μ η μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ. Τότε $\lambda_\mu \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow \lambda_\mu = 2$ και η μ έχει εξίσωση: $y - 4 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 2$.

21662. Δίνεται η ευθεία ε: $-x + y - 2 = 0$ και τα σημεία Α(-5,1) και Β(-3,5).

α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο Β.

β) Να βρείτε:

i. την εξίσωση της ευθείας ε' που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ε.

ii. το σημείο τομής των ευθειών ε και ε'.

iii. το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ε.

Λύση

Έστω Α' το συμμετρικό του Α ως προς το Β. Τότε το σημείο Β θα είναι το μέσο του ΑΑ' οπότε:

$$x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow -3 = \frac{-5 + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow -6 = -5 + x_{A'} \Leftrightarrow x_{A'} = -1$$

$$\text{και } y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{1 + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow 10 = 1 + y_{A'} \Leftrightarrow y_{A'} = 9,$$

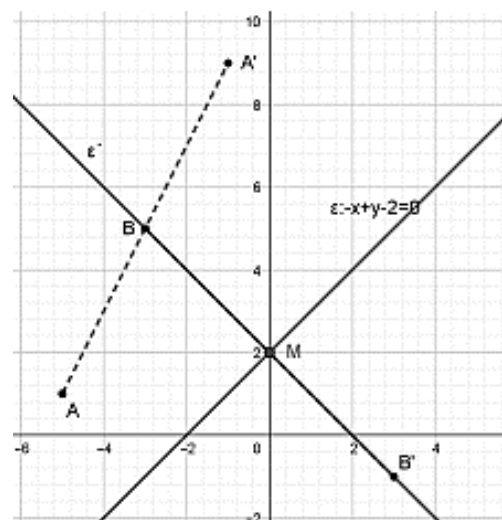
άρα Α'(-1,9).

β) i. Είναι $\lambda_\varepsilon = -\frac{-1}{1} = 1$ και $\varepsilon' \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'} = -1$.

Η ε' έχει εξίσωση: $y - 5 = -(x + 3) \Leftrightarrow y = -x + 2$.

ii. Έστω Μ το σημείο τομής των ευθειών ε, ε'. Οι συντεταγμένες του Μ, θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος των ε, ε'.

$$\begin{cases} -x + y - 2 = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - x + 2 - 2 = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}, \text{ άρα } M(0,2).$$



iii. Αν B' είναι το συμμετρικό του B ως προς την ευθεία ε , τότε το B' είναι σημείο της ευθείας ε' και το M θα είναι το μέσο του BB' οπότε: $x_M = \frac{x_{B'} + x_B}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{x_{B'} - 3}{2} \Leftrightarrow x_{B'} - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{B'} = 3$ και $y_M = \frac{y_{B'} + y_B}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{y_{B'} + 5}{2} \Leftrightarrow y_{B'} + 5 = 4 \Leftrightarrow y_{B'} = -1$, άρα $B'(3, -1)$.

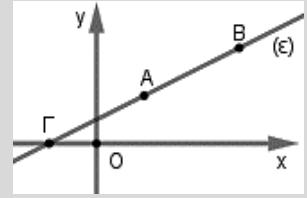
20868. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα σημεία

$A(1, 1)$, $B(3, 2)$ και Γ μιας ευθείας (ε).

α) Να βρείτε την κλίση λ της ευθείας (ε).

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ , στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$.



Λύση

α) $\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$.

β) $\varepsilon: y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

γ) Για $y = 0$ η εξίσωση της ε γίνεται $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$, άρα $\Gamma(-1, 0)$.

21162. Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(-1, -6)$. Να βρεθούν:

α) Οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB .

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

γ) Η εξίσωση της μεσοκάθετου ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

Λύση

α) Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2-6}{2} = -2$, άρα $M(1, -2)$.

β) $\lambda_{AB} = \frac{-6-2}{-1-3} = \frac{-8}{-4} = 2$.

γ) Είναι $\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow 2\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{1}{2}$

Η μεσοκάθετος (ε) του τμήματος AB έχει εξίσωση $y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

21964. Δίνονται το σημείο $A(4, -2)$ και η ευθεία (ε_1) με εξίσωση:

$x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:

α) την ευθεία (ε_2) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1).

β) το σημείο τομής B , των ευθειών (ε_1) και (ε_2): $y = -x + 2$.

γ) το συμμετρικό Γ του σημείου A , ως προς την ευθεία (ε_1).

Λύση

α) Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση:

$y = x + 2$, συνεπώς συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$. Είναι $\varepsilon_2 \perp \varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_2 \lambda_1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_2 = -1$.

Η ε_2 έχει εξίσωση: $y + 2 = -1(x - 4) \Leftrightarrow y = -x + 2$

β) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής B, των δύο ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2) θα προκύψει από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases},$$

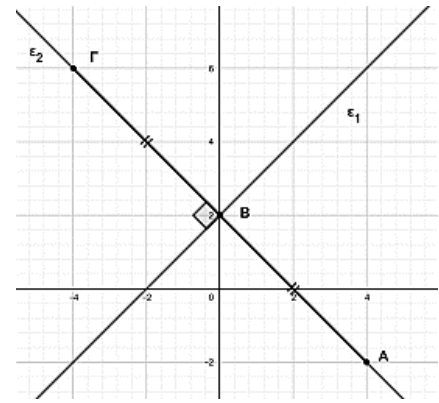
άρα B(0,2).

γ) Αν Γ το συμμετρικό του A ως προς το B τότε τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά και μάλιστα το B είναι το μέσο του τμήματος

$$A\Gamma, \text{ οπότε: } x_B = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{4 + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 4 + x_\Gamma = 0 \Leftrightarrow x_\Gamma = -4$$

$$\text{και } y_B = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{-2 + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow -2 + y_\Gamma = 4 \Leftrightarrow y_\Gamma = 6, \text{ άρα}$$

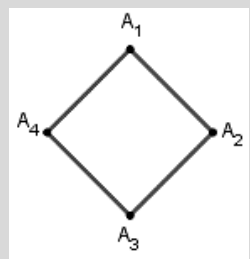
Γ(-4,6).



22047. Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών;

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 2$.



Λύση

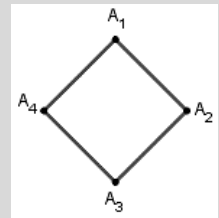
α) Είναι $A_1A_2 \parallel A_3A_4 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_3$ και $A_2A_3 \parallel A_4A_1 \Leftrightarrow \lambda_2 = \lambda_4$.

β) Είναι $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2} = 1 + 1 = 2$.

22049. Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποια σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών;

β) Να αποδείξετε ότι: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -4$.



Λύση

α) Είναι $A_1A_2 \perp A_2A_3 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1, A_2A_3 \perp A_3A_4 \Leftrightarrow \lambda_2 \lambda_3 = -1, A_3A_4 \perp A_4A_1 \Leftrightarrow \lambda_3 \lambda_4 = -1$ και $A_4A_1 \perp A_1A_2 \Leftrightarrow \lambda_4 \lambda_1 = -1$.

β) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -1 - 1 - 1 - 1 = -4$.

22071. Οι πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου ABΓΔ έχουν εξισώσεις $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + y + 5 = 0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο K(1,2).

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η κορυφή A του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες A(-3, 1).

ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Γ(5, 3).

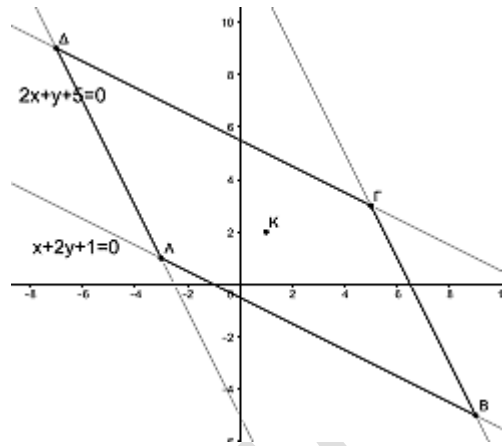
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του BΓ και ΓΔ.

Λύση

α) i. Το σημείο τομής των ευθειών AB και AD είναι το σημείο A, του οποίου οι συντεταγμένες προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω συστήματος.

$$\begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-1 \\ 2(-2y-1)+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-1 \\ -4y-2+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-1 \\ -3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2(-1)-1=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Άρα $A(-3,1)$.



ii. Το σημείο K είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, οπότε είναι το μέσο του τμήματος AG.

Αν $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, τότε

$$x_K = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{-3 + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow -3 + x_\Gamma = 2 \Leftrightarrow x_\Gamma = 5 \text{ και}$$

$$y_K = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{1 + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 + y_\Gamma = 4 \Leftrightarrow y_\Gamma = 3, \text{ Άρα } \Gamma(5,3).$$

β) Η πλευρά BG διέρχεται από το σημείο $\Gamma(5,3)$ και $B\Gamma \parallel AD$. Η εξίσωση της ευθείας AD είναι $2x + y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 5$ με $\lambda_{AD} = -2$, άρα $\lambda_{B\Gamma} = -2$, οπότε η εξίσωση της BG είναι:

$$y - 3 = -2(x - 5) \Leftrightarrow y = -2x + 13.$$

Η πλευρά ΓΔ διέρχεται από το $\Gamma(5,3)$ και $\Gamma\Delta \parallel AB$. Η εξίσωση της ευθείας AB είναι $x + 2y + 1 = 0$ με

$$\lambda_{AB} = -\frac{1}{2}, \text{ άρα } \lambda_{\Gamma\Delta} = -\frac{1}{2}, \text{ οπότε η εξίσωση της } \Gamma\Delta \text{ είναι: } y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 5) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}.$$

22092. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ με κορυφή $A(1,4)$. Η πλευρά AD έχει εξίσωση $3x - 2y + 5 = 0$ και η διαγώνιος BD έχει εξίσωση $y = x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(-1,1)$.

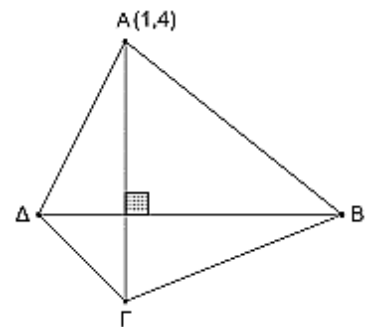
β) Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ.

Λύση

α) Οι συντεταγμένες της κορυφής Δ προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών AD και BD που διέρχονται από το σημείο αυτό.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2(x + 2) + 5 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2x - 4 + 5 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + 2 = 1 \end{cases}$$

άρα $\Delta(-1,1)$.



β) Είναι $\lambda_{BA} = 1$ και $BD \perp AG \Leftrightarrow \lambda_{BA} \lambda_{AG} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AG} = -1$.

Η εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ είναι $y - 4 = -(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 5$

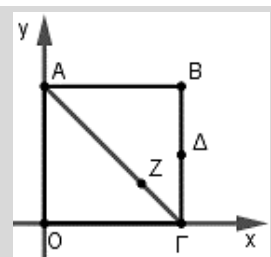
22173. Δίνεται το τετράγωνο ABΓO με κορυφές τα σημεία $A(0,4)$, $B(4,4)$, $\Gamma(4,0)$, $O(0,0)$. Στην διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Z, τέτοιο ώστε

$$\overline{AZ} = \frac{3}{4} \overline{AG}. \text{ Επίσης, θεωρούμε το μέσο } \Delta \text{ της } B\Gamma.$$

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Z.



β) Αν το σημείο Δ είναι το (4,2) και το σημείο Ζ το (3,1), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ.

Λύση

α) i. Οι συντεταγμένες του μέσου Δ του ΒΓ δίνονται από τους τύπους

$$x_{\Delta} = \frac{x_{\Gamma} + x_B}{2} = \frac{4+4}{2} = 4 \text{ και } y_{\Delta} = \frac{y_{\Gamma} + y_B}{2} = \frac{4+0}{2} = 2, \text{ άρα } \Delta(4,2).$$

ii. Έστω Ζ(x, y). Τότε $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow (x-0, y-4) = \frac{3}{4}(4-0, 0-4) \Leftrightarrow (x, y-4) = \frac{3}{4}(4, -4) \Leftrightarrow$

$$(x, y-4) = (3, -3) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y-4=-3 \Leftrightarrow y=1 \end{cases}, \text{ άρα } Z(3,1).$$

β) Είναι $\lambda_{AG} = \frac{0-4}{4-0} = -1, \lambda_{Z\Delta} = \frac{2-1}{4-3} = 1$. Επειδή $\lambda_{AG} \lambda_{Z\Delta} = -1$ είναι $AG \perp Z\Delta$.

4ο Θέμα

14970. Δίνεται η ευθεία $y = \lambda(x-2) + \lambda - 2, \lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\lambda = 1$ και όταν $\lambda = 2$. Κατόπιν να βρείτε το κοινό σημείο Μ των δυο ευθειών. Έστω $M(1, -2)$

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ , διέρχονται από το Μ.

γ) Να βρείτε:

i. τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας (1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii. για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

Λύση

α) Για $\lambda = 1$ είναι $y = x - 2 + 1 - 2 \Leftrightarrow y = x - 3$ και για $\lambda = 2$ είναι $y = 2(x - 2) + 2 - 2 = 2x - 4$

Οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών είναι η λύση του συστήματός τους. Είναι

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ 2x - 4 = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 3 = -2 \\ x = 1 \end{cases}, \text{ άρα } M(1, -2).$$

β) Αρκεί οι συντεταγμένες του Μ να επαληθεύουν τις (1).

Είναι $\cancel{2} = \lambda(1-2) + \lambda \cancel{2} \Leftrightarrow 0 = -\lambda + \lambda$ ισχύει, άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ , διέρχονται από το Μ.

γ) i. Για $y=0$ είναι $0 = \lambda(x-2) + \lambda - 2 \Leftrightarrow \lambda x - 2\lambda + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda x = \lambda + 2 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda+2}{\lambda}, \lambda \neq 0$ αφού η (1)

τέμνει τους άξονες. Για $x=0$ είναι $y = -2\lambda + \lambda - 2 = -(\lambda+2)$, άρα $A\left(\frac{\lambda+2}{\lambda}, 0\right)$ και $B(0, -\lambda-2)$.

ii. Το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδό: $E = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda+2}{\lambda}\right| |-(\lambda+2)| = \frac{|\lambda+2|^2}{2|\lambda|} = \frac{\lambda^2 + 4\lambda + 4}{2|\lambda|}$.

$$\text{Είναι } E = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda^2 + 4\lambda + 4}{2|\lambda|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = |\lambda| \quad (2)$$

Αν $\lambda < 0$ η (2) γίνεται: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = -\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda = -4$

Για $\lambda = -1$ είναι $y = x - 2 + 1 - 2 = x - 3$ δεκτή και για $\lambda = -4$ είναι $y = -4(x-2) - 4 - 2 = -4x + 2$ δεκτή.

Αν $\lambda > 0$ η (2) γίνεται: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$ αδύνατη αφού έχει $\Delta < 0$.

14978. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,3)$.

α) Αν $M(x, y)$ σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του M από τα A και B αντίστοιχα.

β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2 , ώστε το σημείο M να ανήκει στη μεσοκάθετο του AB .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB .

δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣAB να είναι ισόπλευρο.

Λύση

α) $d_1 = (MA) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ και $d_2 = (MB) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$.

β) Για να ανήκει το M στην μεσοκάθετο του AB πρέπει να ισαπέχει από τα άκρα του A και B δηλαδή να ισχύει $d_1 = d_2$.

γ) Είναι $d_1 = d_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow 4x + 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$.

δ) Για να είναι ισόπλευρο το τρίγωνο ΣAB αρκεί $(AB) = (\Sigma A) = (\Sigma B)$ με $\Sigma(x, y)$.

Είναι $(\Sigma A) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = d_1$, $(\Sigma B) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = d_2$ και

$(AB) = \sqrt{(1-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Άρα αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} d_1 = (AB) \\ d_1 = d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{2} \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (3-x)^2 = 8 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + 9 - 6x + x^2 = 8 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 2 = 0 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \text{ ή } x = 2 - \sqrt{3} \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \text{ ή } x = 2 - \sqrt{3} \\ y = 2 - \sqrt{3} \text{ ή } y = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Άρα το Σ είναι: $\Sigma(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$ ή $\Sigma(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$.

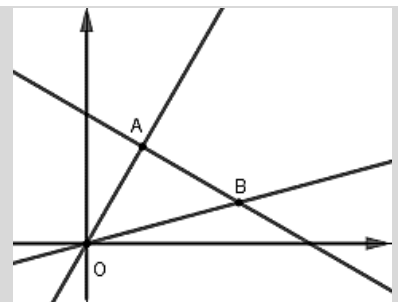
15029. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.

δ) Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.



Λύση

α) Είναι $\lambda_{OA} = \frac{\sqrt{3}-0}{1-0} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3} = \varepsilon\varphi 60^\circ \Leftrightarrow \omega = 60^\circ$, οπότε η OA έχει εξίσωση $y = \sqrt{3}x$.

β) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi = -\varepsilon\varphi 30^\circ = \varepsilon\varphi 150^\circ \Leftrightarrow \varphi = 150^\circ$.

Η AB έχει εξίσωση: $y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Είναι $\lambda_{OA} \lambda_{AB} = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -1 \Leftrightarrow OA \perp AB \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$.

Είναι $(OA) = \sqrt{(1-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = 2$ και

$$(AB) = \sqrt{(\sqrt{3}+1-1)^2 + (\sqrt{3}-1-\sqrt{3})^2} = 2,$$

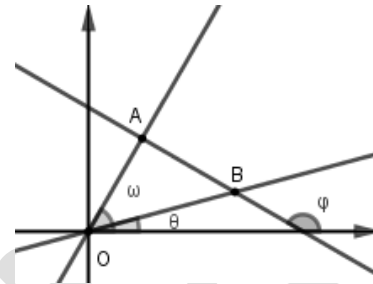
άρα $(OA) = (AB)$ οπότε το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.

δ) Επειδή το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, είναι $\angle AOB = 45^\circ$.

Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η OB με τον xx' , είναι

$$\theta = \omega - \angle AOB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ.$$

Η ευθεία OB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{OB} = \frac{\sqrt{3}+1-0}{\sqrt{3}-1-0} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.



15275. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2, 1)$.

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το M. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A, B αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ , τα μήκη των τμημάτων OA, OB.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

Λύση

α) i. Η ε έχει εξίσωση: $y - 1 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow y = \lambda x + 1 - 2\lambda$.

ii. Η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες όταν δεν είναι παράλληλη στον $x'x$, άρα $\lambda \neq 0$ και όταν δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή όταν $1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$.

β) i. Για $y = 0$ η ε γίνεται $0 = \lambda x + 1 - 2\lambda \Leftrightarrow \lambda x = 1 - 2\lambda \Leftrightarrow x = \frac{1-2\lambda}{\lambda}$, άρα $A\left(\frac{1-2\lambda}{\lambda}, 0\right)$.

Για $x = 0$ είναι $y = 1 - 2\lambda$, άρα $B(0, 1 - 2\lambda)$.

Είναι $(OA) = \left| \frac{1-2\lambda}{\lambda} \right|$ και $(OB) = |1 - 2\lambda|$.

ii. Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές όταν

$$(OA) = (OB) \Leftrightarrow \left| \frac{1-2\lambda}{\lambda} \right| = |1 - 2\lambda| \Leftrightarrow \frac{|1-2\lambda|}{|\lambda|} = |1-2\lambda| \Leftrightarrow 1 = |\lambda| \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

iii. Για $\lambda = 1$ είναι $(OA) = \left| \frac{1-2}{1} \right| = 1$, $(OB) = |1-2| = 1$, οπότε $(OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}$ τ.μ. .

Αν $\lambda = -1$ είναι $(OA) = \left| \frac{1+2}{-1} \right| = 3$, $(OB) = |1+2| = 3$, οπότε $(OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{9}{2}$ τ.μ. .

16003. Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $\varepsilon_\alpha : (\alpha - 4)x - 2\alpha y + \alpha + 4 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\alpha = 0$ και όταν $\alpha = 1$ και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο M.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το M.

γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha < 4$.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $(OA) = 2(OB)$.

Λύση

α) Για $\alpha = 0$ είναι $-4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και για $\alpha = 1$ είναι $-3x - 2y + 5 = 0$.

Οι συντεταγμένες του M είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} x = 1 \\ -3x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$.

Είναι $\begin{cases} x = 1 \\ -3x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -3 - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, άρα οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο $M(1, 1)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $M(1, 1)$.

Με $x = y = 1$ η αρχική εξίσωση γράφεται $\alpha - 4 - 2\alpha + \alpha + 4 = 0$ και προφανώς ισχύει. Άρα, όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το σημείο M.

γ) i. Οι ευθείες που προκύπτουν όταν $\alpha = 4$ ή $\alpha = 0$ δεν τέμνουν και τους δυο άξονες αφού η πρώτη είναι παράλληλη στον $x'x$ και η δεύτερη στον $y'y$. Έτσι, βρίσκουμε τα κοινά σημεία των ευθειών της οικογένειας με τους άξονες, όταν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 4$.

Για $x = 0$ είναι $y = \frac{\alpha + 4}{2\alpha}$ και για $y = 0$ είναι $x = -\frac{\alpha + 4}{\alpha - 4}$, οπότε τα κοινά σημεία με τους άξονες είναι τα

$A\left(-\frac{\alpha + 4}{\alpha - 4}, 0\right)$ και $B\left(0, \frac{\alpha + 4}{2\alpha}\right)$. Τα σημεία A και B βρίσκονται στους θετικούς ημιάξονες, μόνο όταν:

$$\begin{cases} -\frac{\alpha + 4}{\alpha - 4} > 0 \\ \frac{\alpha + 4}{2\alpha} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha + 4)(\alpha - 4) < 0 \\ 2\alpha(\alpha + 4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < \alpha < 4 \\ \alpha < -4 \text{ ή } \alpha > 0 \end{cases}$$

Η συναλήθευση των δυο αποτελεσμάτων δίνει $0 < \alpha < 4$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Όταν $0 < \alpha < 4$ τα σημεία A, B είναι στους θετικούς ημιάξονες, οπότε

$(OA) = -\frac{\alpha + 4}{\alpha - 4}$ και $(OB) = \frac{\alpha + 4}{2\alpha}$, οπότε

$$(OA) = 2(OB) \Leftrightarrow -\frac{\alpha + 4}{\alpha - 4} = 2 \cdot \frac{\alpha + 4}{2\alpha} \Leftrightarrow -\alpha = \alpha - 4 \Leftrightarrow 4 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

17078. Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha+1, 1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$.

ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

iii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

«Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{\alpha - 2\alpha}{4 - 3} = -\alpha \text{ και η ευθεία } AB \text{ έχει εξίσωση } y - \alpha = -\alpha(x - 4) \Leftrightarrow y = -\alpha x + 5\alpha.$$

ii. Το σημείο Γ βρίσκεται στην ευθεία AB όταν

$$1 - \alpha = -\alpha(\alpha + 1) + 5\alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha = -\alpha^2 - \alpha + 5\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Το σημείο Δ βρίσκεται στην ευθεία AB όταν $1 = -\alpha \cdot \alpha + 5\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

iii. Είναι $\overrightarrow{AB} = (4 - 3, \alpha - 2\alpha) = (1, -\alpha)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (\alpha + 1 - \alpha, 1 - \alpha - 1) = (1, -\alpha)$.

Αν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ τότε τα σημεία Γ και Δ δεν ανήκουν στην ευθεία AB και επειδή $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Έστω ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ και

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (-\alpha)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (1 - 2\alpha)^2} \Leftrightarrow \cancel{\alpha^2} + \cancel{6\alpha} + 9 + \cancel{\alpha^2} - 6\alpha + 9 = \cancel{\alpha^2} - 6\alpha + 9 + \cancel{\alpha^2} - 4\alpha + 4\alpha^2 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 10\alpha + 9 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = -44 < 0$ άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

18568. Δίνονται τα σημεία $A(2, 4)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(3, -2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E .

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι παράλληλη της $B\Gamma$.

Λύση

α) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{0 - 4}{-1 - 2} = \frac{4}{3}$ και $\lambda_{A\Gamma} = \frac{-2 - 4}{3 - 2} = -6$.

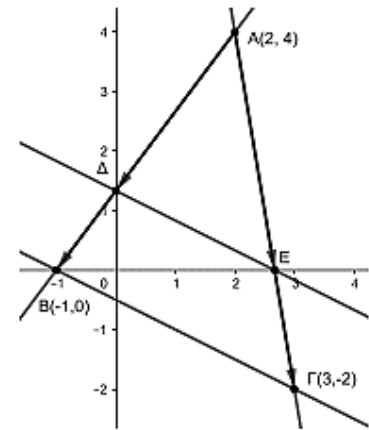
Επειδή $\lambda_{AB} \neq \lambda_{A\Gamma}$ οι ευθείες AB και $A\Gamma$ δεν είναι παράλληλες, οπότε τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά και αποτελούν κορυφές τριγώνου.

β) i. Η ευθεία AB έχει εξίσωση: $y = \frac{4}{3}(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ και για

$x = 0$ γίνεται $y = \frac{4}{3}$, άρα $\Delta\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

Η ευθεία AG έχει εξίσωση $y - 4 = -6(x - 2) \Leftrightarrow y = -6x + 16$

και για $y = 0$ γίνεται $0 = -6x + 16 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$, άρα $E\left(\frac{8}{3}, 0\right)$.



ii. Είναι $\overrightarrow{AD} = \left(0 - 2, \frac{4}{3} - 4\right) = \left(-2, -\frac{8}{3}\right) = 2\left(-1, -\frac{4}{3}\right)$ και

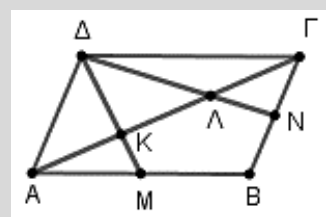
$\overrightarrow{AB} = \left(-1 - 0, 0 - \frac{4}{3}\right) = \left(-1, -\frac{4}{3}\right)$, άρα $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.

Είναι $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{8}{3} - 2, 0 - 4\right) = \left(\frac{2}{3}, -4\right) = 2\left(\frac{1}{3}, -2\right)$ και $\overrightarrow{EG} = \left(3 - \frac{8}{3}, -2 - 0\right) = \left(\frac{1}{3}, -2\right)$, άρα $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EG}$.

γ) Είναι $\lambda_{\Delta E} = \frac{0 - \frac{4}{3}}{\frac{8}{3} - 0} = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_{BG} = \frac{-2 - 0}{3 + 1} = -\frac{1}{2}$, άρα $\lambda_{\Delta E} = \lambda_{BG} \Leftrightarrow AD // BG$.

22065. Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(8,0)$, $\Gamma(10,4)$, $\Delta(2,4)$.

Τα σημεία M και N είναι τα μέσα των πλευρών AB και BΓ αντίστοιχα, ενώ K και Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔM και ΔN την διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N.

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών AG, ΔM, ΔN και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων K και Λ.

δ) Να δείξετε ότι τα σημεία K και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο ΑΓ, δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα.

Λύση

α) Επειδή $y_A = y_B = 0$, τα σημεία A, B βρίσκονται στον άξονα x'x. Επειδή $y_\Gamma = y_\Delta = 4$ η ευθεία ΓΔ έχει εξίσωση $y = 4$ και είναι παράλληλη στον x'x. Είναι $(AB) = 8 - 0 = 8$, $(\Gamma\Delta) = 10 - 2 = 8$. Επειδή οι πλευρές AB, ΓΔ είναι ίσες και παράλληλες, το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 4$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 0$, άρα $M(4, 0)$.

Είναι $x_N = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = 9$, $y_N = \frac{y_\Gamma + y_B}{2} = 2$, άρα $N(9, 2)$.

γ) Είναι $\lambda_{AG} = \frac{4 - 0}{10 - 0} = \frac{2}{5}$, οπότε η AG έχει εξίσωση $y - 0 = \frac{2}{5}(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x$.

Είναι $\lambda_{\Delta M} = \frac{0 - 4}{4 - 2} = -2$, οπότε η ΔM έχει εξίσωση $y - 0 = -2(x - 4) \Leftrightarrow y = -2x + 8$.

Είναι $\lambda_{\Delta N} = \frac{2 - 4}{9 - 2} = -\frac{2}{7}$, οπότε η ΔN έχει εξίσωση $y - 4 = -\frac{2}{7}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{7}x + \frac{32}{7}$.

Το K είναι το σημείο τομής των AG, ΔM, οπότε για τις συντεταγμένες του έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{5}x \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{5}x = -2x + 8 \Leftrightarrow 2x = -10x + 40 \Leftrightarrow 12x = 40 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3} \text{ και } y = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{4}{3}, \text{ άρα}$$

$$K\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Το Λ είναι το σημείο τομής των ΑΓ, ΔΝ, οπότε για τις συντεταγμένες του έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{5}x \\ y = -\frac{2}{7}x + \frac{32}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{5}x = -\frac{2}{7}x + \frac{32}{7} \Leftrightarrow 14x = -10x + 160 \Leftrightarrow 24x = 160 \Leftrightarrow x = \frac{20}{3} \text{ και } y = \frac{2}{5} \cdot \frac{20}{3} = \frac{8}{3}, \text{ άρα}$$

$$\Lambda\left(\frac{20}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

$$\delta) \text{ Είναι } (AK) = \sqrt{\left(\frac{10}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{116}}{3}, (K\Lambda) = \sqrt{\left(\frac{10}{3} - \frac{20}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{116}}{3} \text{ και}$$

$$(ΛΓ) = \sqrt{\left(10 - \frac{20}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{116}}{3}. \text{ Επειδή } (AK) = (K\Lambda) = (ΛΓ), \text{ τα } K \text{ και } \Lambda \text{ τριχοτομούν την διαγώνιο}$$

ΑΓ.

3ο Θέμα

15178. Δίνεται η εξίσωση $(\mu+1)x + (\mu+2)y = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (1).

α) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

β) i. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της;

ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της;

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ , προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της;

Λύση

α) i. Η (1) δεν παριστάνει ευθεία όταν $\begin{cases} \mu+1=0 \\ \mu+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=-1 \\ \mu=-2 \end{cases}$ που είναι άτοπο, άρα παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

ii. Για $x = 0$ και $y = 0$ είναι $(\mu+1) \cdot 0 + (\mu+2) \cdot 0 = 0$, οπότε όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

β) i. Η (1) έχει συντελεστή διεύθυνσης όταν $\mu+2 \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq -2$, τότε $\lambda = -\frac{\mu+1}{\mu+2}$, οπότε

$\lambda = 0 \Leftrightarrow -\frac{\mu+1}{\mu+2} = 0 \Leftrightarrow \mu+1 = 0 \Leftrightarrow \mu = -1$. Τότε η (1) γίνεται $0 \cdot x + (-1+2)y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ και είναι ο άξονας $x'x$.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (1) δεν ορίζεται όταν $\mu+2 = 0 \Leftrightarrow \mu = -2$, τότε η (1) γίνεται $(-2+1)x + 0 \cdot y = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και είναι ο άξονας $y'y$.

γ) Είναι $\lambda = \tan 45^\circ \Leftrightarrow -\frac{\mu+1}{\mu+2} = 1 \Leftrightarrow -\mu-1 = \mu+2 \Leftrightarrow -2\mu = 3 \Leftrightarrow \mu = -\frac{3}{2}$. Τότε η (1) γίνεται:

$$\left(-\frac{3}{2}+1\right)x + \left(-\frac{3}{2}+2\right)y = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Γενική μορφή ευθείας

2ο Θέμα

15657. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M .

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 : 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

α) Αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 6 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 5y = 10 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Άρα το κοινό τους σημείο M είναι το $M(2, 2)$.

β) Αφού οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $M(2, 2)$ τότε για να διέρχονται και οι τρεις ευθείες από το ίδιο σημείο πρέπει η $\varepsilon_3 : 3x - y = 4$ να διέρχεται από το M .

Για $x = 2$ και $y = 2$ είναι $3 \cdot 2 - 2 = 4$ που ισχύει. Άρα και οι τρεις ευθείες διέρχονται από το M .

16766. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Η (ε_1) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$ και η (ε_2) έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_2 = -\frac{9}{3} = -3 \text{ Είναι } \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{3}(-3) = -1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$$

β) Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, οπότε: $10x = 10$ ή $x = 1$ Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $9x + 3y = 6$ και έχουμε διαδοχικά: $9 - 3y = 6 \Leftrightarrow 9 - 6 = 3y \Leftrightarrow 3y = 3 \Leftrightarrow y = 1$

Άρα, το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι το $A(1, -1)$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_0$. Επομένως, η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι $x = 1$.

22059. Δίνεται το σημείο $A(1, -3)$ και η ευθεία $\varepsilon : 4x + 6y = 1$.

α) Να εξηγήσετε γιατί το A δεν είναι σημείο της ευθείας ε .

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία ε .

Λύση

α) Αν το A ήταν σημείο της ευθείας θα ήταν $4 \cdot 1 + 6 \cdot (-3) = 1 \Leftrightarrow 4 - 18 = 1$ αδύνατο, άρα το A δεν είναι σημείο της ευθείας.

β) Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$. Έστω (η) η ζητούμενη ευθεία.

$$\text{Είναι } \eta // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\eta = \lambda_\varepsilon = -\frac{2}{3}, \text{ οπότε η } (\eta) \text{ έχει εξίσωση: } y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}.$$

22072. Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0$ και (2): $(3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες.

Λύση

α) Η (1) δεν είναι ευθεία όταν υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$ που είναι αδύνατο.

Άρα επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y , η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Η (2) δεν είναι ευθεία όταν υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\begin{cases} 3\lambda + 1 = 0 \\ 2\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ \lambda = 0 \end{cases}$ που είναι αδύνατο.

Άρα επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y , η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Έστω $\vec{\delta}_1 = (\lambda - 1, -\lambda)$ ένα παράλληλο διάνυσμα στην ευθεία (1) και $\vec{\delta}_2 = (-2\lambda, -3\lambda - 1)$ ένα παράλληλο διάνυσμα στην ευθεία (2).

Οι ευθείες (1), (2) είναι κάθετες αν και μόνο αν τα διανύσματα $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ είναι κάθετα, οπότε

$$\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(-2\lambda) - \lambda(-3\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow -2\lambda^2 + 2\lambda + 3\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -3.$$

22171. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x - y = 5$ και $\varepsilon_2 : x - y + 1 = 0$.

α) Να βρεθεί το σημείο τομής τους M.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο M(3,4) και είναι κάθετη στην (ε_2).

γ) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1).

Λύση

α) Για να βρούμε το σημείο τομής λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων τους.

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(y - 1) - y = 5 \\ x = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 3 - y = 5 \\ x = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 8 \\ x = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 4 - 1 = 3 \end{cases}, \text{ άρα } M(3,4).$$

β) Η ευθεία (ε_2) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -\frac{1}{-1} = 1$.

Αν ε η ζητούμενη ευθεία τότε $\lambda_\varepsilon \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -1$.

Η ε έχει εξίσωση: $y - 4 = -1(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 7$.

γ) Ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1) είναι το $\vec{\delta} = (-1, -3)$.

4ο Θέμα

15004.α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(8,5)$.

β) Αν $\varepsilon_1 : 3x - 4y - 4 = 0$, να δείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon_2 : 7x - y - 1 = 0$ είναι $\hat{\phi} = 45^\circ$.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 .

δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3 .

Λύση

α) $\lambda_{AB} = \frac{5-2}{8-4} = \frac{3}{4}$ και $AB: y - 2 = \frac{3}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - 1$.

β) Το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (-4, -3)$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_1 και το διάνυσμα $\vec{\delta}_2 = (-1, -7)$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_2 .

$$\text{Είναι } \cos(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2) = \frac{-4 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-7)}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}} = \frac{25}{5\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα η οξεία γωνία των}$$

ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 45° .

15253. Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$ (1), όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε :

i. είναι παράλληλες στον $x'x$.

ii. είναι παράλληλες στον $y'y$.

iii. διέρχονται από το $(0,0)$.

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

Λύση

α) Η (1) δεν παριστάνει ευθεία όταν $\begin{cases} \mu^2 - 1 = 0 \\ 3\mu^2 - 2\mu - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \pm 1 \\ \mu = 1 \text{ ή } \mu = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \mu = 1$.

Άρα για $\mu \neq 1$ η (1) παριστάνει ευθεία.

β) i. Για να είναι η (1) παράλληλη στον xx' πρέπει $A = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ ή $\mu = -1$. Όμως η τιμή $\mu = 1$ απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά $\mu = -1$.

ii. Για να είναι παράλληλη στον $y'y$ πρέπει $B = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ ή $\mu = -\frac{1}{3}$. Όμως η τιμή $\mu = 1$ απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά $\mu = -\frac{1}{3}$.

iii. Για να διέρχεται από το $(0,0)$ πρέπει $\Gamma = 0 \Leftrightarrow -5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ ή $\mu = -\frac{1}{5}$. Όμως η τιμή $\mu = 1$ απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά $\mu = -\frac{1}{5}$.

γ) Για $\mu = -1$ η (1) γίνεται $\varepsilon_1: 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2$. Για $\mu = 0$ η (1) γίνεται $\varepsilon_2: -x - y + 1 = 0$.

Από το σύστημα των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουμε: $\begin{cases} y = 2 \\ -x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ -x - 2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$.

Δύο από τις ευθείες της (1) τέμνονται στο σημείο $M(1, 2)$, για να διέρχονται όλες οι ευθείες της (1) από το M πρέπει: $(\mu^2 - 1)(-1) + (3\mu^2 - 2\mu - 1) \cdot 2 - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$-\mu^2 + 1 + 6\mu^2 - 4\mu - 2 - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1), διέρχονται από το σταθερό σημείο $M(-1, 2)$.

15439. Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2, 3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$.

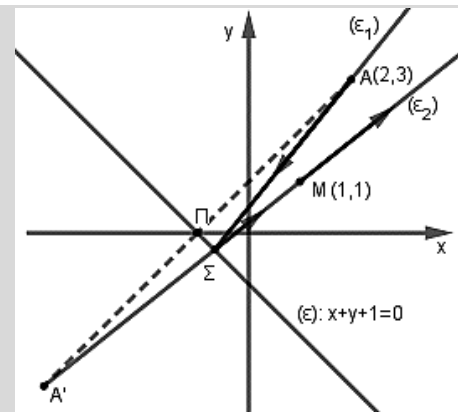
α) i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1, 0)$.

ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία (ε) είναι το σημείο $A'(-4, -3)$.

β) i. Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2) η οποία διέρχεται από τα σημεία A', Σ, M , τότε να βρείτε την εξίσωσή της.

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας (ε_1) πάνω στην ευθεία (ε) .

γ) Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας (ε_1) .



Λύση

α) i. Βρίσκουμε την προβολή Π του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) : Είναι $\lambda_\varepsilon = -1$ και $\varepsilon \perp A\Pi \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_{A\Pi} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Pi} = 1$, οπότε η $A\Pi$ έχει εξίσωση $y - 3 = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = x + 1$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Π προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x + x + 1 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ 2x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + 1 = 0 \\ x = -1 \end{cases}, \text{ άρα } \Pi(-1, 0).$$

ii. Το Π είναι το μέσο του AA' , οπότε $x_\Pi = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{2 + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow -2 = 2 + x_{A'} \Leftrightarrow x_{A'} = -4$ και

$$y_\Pi = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{3 + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow 0 = 3 + y_{A'} \Leftrightarrow y_{A'} = -3, \text{ άρα } A'(-4, -3).$$

β) i. Είναι $\lambda_2 = \frac{1+3}{1+4} = \frac{4}{5}$ και η εξίσωση της (ε_2) είναι $y - 1 = \frac{4}{5}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$.

ii. Οι συντεταγμένες του σημείου Σ , δηλαδή του σημείου πρόσπτωσης της φωτεινής ακτίνας πάνω στην ευθεία (ε) , προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των ευθειών (ε) και (ε_2) :

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{4}{5}x + \frac{1}{5} + 1 = 0 \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4x + 1 + 5 = 0 \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = -6 \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{5}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{5} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{άρα } \Sigma \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

γ) Βρίσκουμε την προσπίπτουσα ακτίνα (ε_1), δηλαδή την ΑΣ:

$$\text{Είναι } \lambda_{\text{ΑΣ}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{5}{4} \text{ και η εξίσωσή της είναι: } y - 3 = \frac{5}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}.$$

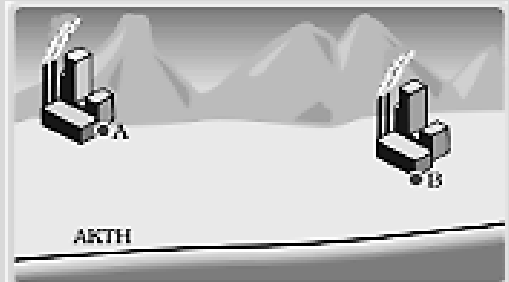
15475. Δύο εργοστάσια Α και Β τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες Α(2,1), Β(4,3), βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια.

β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση $\varepsilon: y = 2x - 7$,

να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια.

γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι Ν(4,1), να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.



Λύση

α) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\text{AB}} = \frac{3-1}{4-2} = 1$ και εξίσωση $y - 1 = x - 2 \Leftrightarrow y = x - 1$.

β) Επειδή το σημείο Ν(x, y) στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα πρέπει να ισαπέχει από τα Α

$$\text{και Β, ισχύει ότι } (NA) = (NB) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$8x - 4x = -6y + 2y + 25 - 5 \Leftrightarrow 4x = 20 - 4y \Leftrightarrow x = 5 - y \quad (1)$$

Επειδή όμως το Ν ανήκει και στην ευθεία ε , οι συντεταγμένες του Ν είναι η λύση του συστήματος της (1)

$$\text{με την } \varepsilon. \text{ Είναι } \begin{cases} x = 5 - y \\ y = 2x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y = 2(5 - y) - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y = 10 - 2y - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y = 1 \end{cases}, \text{ άρα } N(4,1).$$

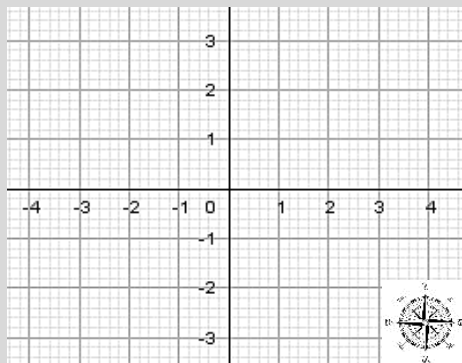
$$\gamma) \text{ Είναι } (NA) = (NB) = \sqrt{(4-2)^2 + (1-1)^2} = 2.$$

16477. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση ευθείας ελ: $\lambda x + (1-\lambda)y + 2 = 0$ όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ . Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο $O(0,0)$.

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ .

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

β) Ένα ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το P έχει εξίσωση $x + y + 4 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους.



Λύση

α) i. Για $\lambda = 0$ είναι $\varepsilon_0: y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ και για $\lambda = 1$ είναι $\varepsilon_1: x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Δύο από τις ευθείες ε_λ , οι $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ τέμνονται στο σημείο $(-2, -2)$. Για να είναι αυτές οι συντεταγμένες του φάρου Φ πρέπει: $\lambda(-2) + (1-\lambda)(-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow -2\lambda - 2 + 2\lambda + 2 = 0$ ισχύει.

Άρα $\Phi(-2, -2)$.

ii. Για να υπάρχει φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το O πρέπει

$$\lambda \cdot 0 + (1-\lambda) \cdot 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0 \text{ αδύνατο.}$$

Οπότε δεν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

β) Έστω ότι το P έχει συντεταγμένες (x_1, y_1) . Επειδή το P βρίσκεται στην ευθεία $x + y + 4 = 0$, ισχύει ότι: $x_1 + y_1 + 4 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -4 - x_1$

Η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα PO με μήκος 4 μονάδες, άρα

$$(PO) = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(0-x_1)^2 + (0-y_1)^2} = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = 16 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x_1^2 + (-4-x_1)^2 = 16 \Leftrightarrow x_1^2 + x_1^2 + 8x_1 + 16 = 16 \Leftrightarrow 2x_1^2 + 8x_1 = 0 \Leftrightarrow 2x_1(x_1 + 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ ή } x_1 = -4$$

Για $x_1 = 0$ είναι $y_1 = -4$ και για $x_1 = -4$ είναι $y_1 = 0$

Επειδή το P βρίσκεται βορειότερα του φάρου Φ είναι $y_1 > -2$, άρα το ρυμουλκό πλοίο έχει συντεταγμένες $P(-4, 0)$.

18244. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2: y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα $x'x$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι 15° .

δ) Να αποδείξετε ότι $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

Λύση

α) Η ευθεία ε_1 για $x = 1$ δίνει $y = \sqrt{3}$, άρα το $A(1, \sqrt{3})$ είναι σημείο της ε_1 , οπότε αυτή διέρχεται από τα O και A .

Η ευθεία ε_2 για $x = 1$ δίνει $y = 1$, άρα το $B(1,1)$ είναι σημείο της ε_2 , οπότε αυτή διέρχεται από τα O και B .

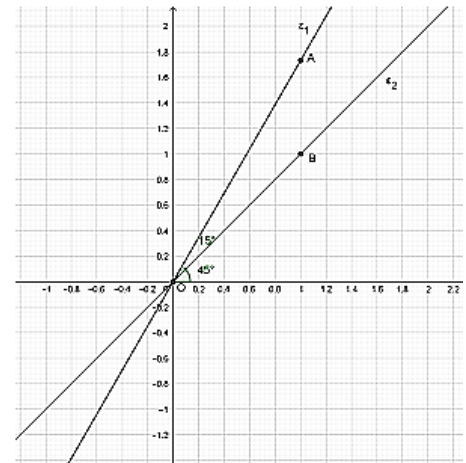
β) Έστω ω_1 η γωνία που σχηματίζει η ε_1 με τον άξονα $x'x$, τότε $\varepsilon\omega_1 = \lambda_1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow \omega_1 = 60^\circ$.

Έστω ω_2 η γωνία που σχηματίζει η ε_2 με τον άξονα $x'x$, τότε $\varepsilon\omega_2 = \lambda_2 = 1 \Leftrightarrow \omega_2 = 45^\circ$.

γ) Από το σχήμα προκύπτει ότι η γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι ίση με $\omega_1 - \omega_2 = 15^\circ$.

δ) Έστω $\vec{\delta}_1 // \varepsilon_1$, τότε $\vec{\delta}_1 = (1, \sqrt{3})$ και $\vec{\delta}_2 // \varepsilon_2$, τότε $\vec{\delta}_2 = (1, 1)$.

$$\text{Είναι } \cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{1 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ άρα } \cos 15^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$



21160. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $O(0, 0)$, $B(\kappa, 0)$ και $\Gamma(0, 2\kappa)$ όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου $OB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $OB\Delta E$ και $OGZH$, τότε:

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta$ και BZ .

β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου $OB\Gamma$ που διέρχεται από το O .

γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\Gamma\Delta$, BZ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

α) Επειδή τα τετράπλευρα $OB\Delta E$ και $OGZH$ είναι τετράγωνα, οι συντεταγμένες των κορυφών τους είναι: $\Delta(\kappa, -\kappa)$, $E(0, -\kappa)$, $Z(-2\kappa, 2\kappa)$ και $H(-2\kappa, 0)$

Η ευθεία $\Gamma\Delta$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{-\kappa - 2\kappa}{\kappa - 0} = -3$

και εξίσωση $y - 2\kappa = -3x \Leftrightarrow y = -3x + 2\kappa$.

Η ευθεία BZ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{BZ} = \frac{2\kappa - 0}{-2\kappa - \kappa} = -\frac{2}{3}$

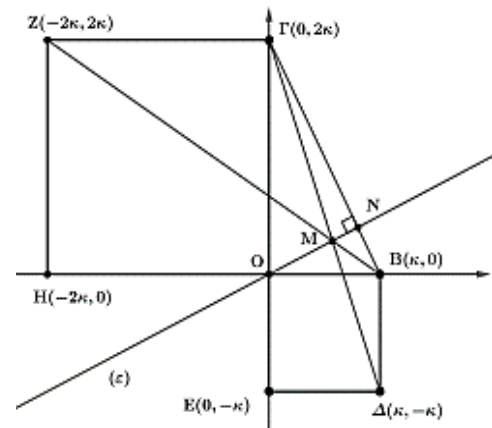
και εξίσωση $y - 0 = -\frac{2}{3}(x - \kappa) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\kappa$.

β) Έστω ON ύψος του τριγώνου $OB\Gamma$.

Είναι $\lambda_{B\Gamma} = \frac{2\kappa - 0}{0 - \kappa} = -2$ και

$$ON \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{ON} \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ON} = \frac{1}{2}$$

Το ύψος ON διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}x$.



γ) Για να αποδείξουμε ότι οι ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta$, BZ και η ευθεία (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο, αρκεί να βρούμε σημείο M του οποίου οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν όλες τις εξισώσεις των ευθειών. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι η τομή δύο ευθειών από τις τρεις ανήκει στην τρίτη ευθεία. Οι συντεταγμένες της τομής M των ευθειών (ε) και $\Gamma\Delta$ δίνονται από την λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\kappa \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\kappa \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -4x + 4\kappa \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 4\kappa \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\kappa}{7} \\ y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\kappa}{7} = \frac{2\kappa}{7} \end{cases}, \text{ άρα} \\ M\left(\frac{4\kappa}{7}, \frac{2\kappa}{7}\right).$$

Το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ αφού οι συντεταγμένες του Μ την επαληθεύουν, οπότε $\frac{2\kappa}{7} = -\frac{2}{3}\left(\frac{4\kappa}{7}\right) + \frac{2\kappa}{3} \Leftrightarrow \frac{2\kappa}{7} = -\frac{8\kappa}{21} + \frac{2\kappa}{3} \Leftrightarrow 6\kappa = -8\kappa + 14\kappa$ ισχύει.

21652. Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + y = 2\lambda$ (1) και $x + \lambda y = \lambda + 1$ (2), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες ε_λ και η_λ αντίστοιχα.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται.

γ) Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

i. να βρείτε συνάρτησε του λ τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των ε_λ και η_λ .

ii. αν $M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$ να αποδείξετε ότι το Μ κινείται στην ευθεία $\zeta: x - y = 1$.

Λύση

α) Η εξίσωση $\lambda x + y = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda x + y - 2\lambda = 0$ είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με $B = 1 \neq 0$, οπότε παριστάνει ευθεία ε_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Η εξίσωση $x + \lambda y = \lambda + 1 \Leftrightarrow x + \lambda y - (\lambda + 1) = 0$ είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = 1 \neq 0$, οπότε παριστάνει ευθεία η_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Οι ευθείες τέμνονται όταν το σύστημά τους έχει μοναδική λύση. Είναι $\lambda x + y = 2\lambda \Leftrightarrow y = 2\lambda - \lambda x$ (1), οπότε:

$$x + \lambda y = \lambda + 1 \Leftrightarrow x + \lambda(2\lambda - \lambda x) = \lambda + 1 \Leftrightarrow x + 2\lambda^2 - \lambda^2 x = \lambda + 1 \Leftrightarrow (1 - \lambda^2)x = -2\lambda^2 + \lambda + 1.$$

Η εξίσωση έχει λύση μόνο όταν $1 - \lambda^2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \neq 1 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 1$.

γ) i. Για $\lambda \neq \pm 1$ είναι $x = \frac{-2\lambda^2 + \lambda + 1}{1 - \lambda^2} = \frac{-(\cancel{\lambda-1})(2\lambda+1)}{-(\cancel{\lambda-1})(\lambda+1)} = \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}$. Τότε η (1) γίνεται

$$y = 2\lambda - \lambda \cdot \frac{2\lambda+1}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1}, \text{ οπότε το σημείο τομής των ευθειών είναι το } M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right), \lambda \neq \pm 1.$$

ii. Το Μ κινείται στην ευθεία ζ , αν και μόνο αν για κάθε $\lambda \neq \pm 1$ είναι:

$$\frac{2\lambda+1}{\lambda+1} - \frac{\lambda}{\lambda+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\lambda+1-\lambda}{\lambda+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda+1}{\lambda+1} = 1 \text{ ισχύει.}$$

Εμβαδόν τριγώνου – Απόσταση σημείου από ευθεία

2ο Θέμα

15440. Δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(3, 0)$ και $\Gamma(1, 1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$.

β) i. Να εξετάσετε αν τα σημεία A , B και Γ ορίζουν τρίγωνο.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

α) $\overrightarrow{AB} = (3-0, 0-2) = (3, -2)$, $\overrightarrow{AG} = (1-0, 1-2) = (1, -1)$.

β) i. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0$, οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}$ δεν είναι παράλληλα και τα σημεία A, B, Γ ορίζουν τρίγωνο.

ii. $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})| = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$

16194. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) : 8x + y - 28 = 0$, $(\varepsilon_2) : x - y + 1 = 0$, $(\varepsilon_3) : 3x + 4y + 5 = 0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των (ε_1) και (ε_2) .

β) Αν το σημείο τομής είναι το $M(3, 4)$ να υπολογίσετε:

i. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου O η αρχή των αξόνων.

ii. Την απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε_3) .

Λύση

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις των δύο ευθειών και παίρνουμε $9x = 27 \Leftrightarrow x = 3$. Αντικαθιστούμε στην $\chi - \psi = -1$ το $\chi = 3$ και παίρνουμε $\psi = 4$, άρα $M(3, 4)$.

β) i. Είναι $\overrightarrow{OM} = (3-0, 4-0) = (3, 4)$ και $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

ii. $d(M, \varepsilon_3) = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{30}{5} = 6$.

16425. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{2}{3}x + 1$ και $\varepsilon_2 : x = \frac{3}{2}y + 9$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 .

Λύση

α) Είναι $\varepsilon_1 : y = \frac{2}{3}x + 1$ με $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ και $\varepsilon_2 : x = \frac{3}{2}y + 9 \Leftrightarrow x - 9 = \frac{3}{2}y \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 6 \Leftrightarrow -2x + 3y + 18 = 0$ με $\lambda_2 = \frac{2}{3}$. Είναι $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β) Στην ε_1 για $x = 0$ παίρνουμε $y = 1$, οπότε το σημείο $M(0, 1)$ ανήκει στην ε_1 .

$$\text{Είναι } d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(M, \varepsilon_2) = \frac{|-2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 18|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = \frac{21}{\sqrt{13}} = \frac{21\sqrt{13}}{13}.$$

16759. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_3) .

Λύση

α) Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $x - 2y + 1 = 0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση $2x + y - 4 = 0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -\frac{2}{1} = -2$

Είναι $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ Άρα, οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β) Για το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) , λύνουμε αρχικά την εξίσωση $x - 2y + 1 = 0$ ως προς x, οπότε: $x = 2y - 1$.

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $2x + y - 4 = 0$ και έχουμε διαδοχικά:

$$2(2y - 1) + y - 4 = 0 \Leftrightarrow 4y - 2 + y - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{5} \text{ και } x = 2 \cdot \frac{6}{5} - 1 = \frac{7}{5}, \text{ άρα το σημείο τομής}$$

των (ε_1) και (ε_2) είναι το $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

γ) Η απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_3) με εξίσωση $y + 1 = 0$ είναι:

$$d(A, \varepsilon_3) = \frac{\left|0 \cdot \frac{7}{5} + \frac{6}{5} + 1\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{11}{5}.$$

16769. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(1,7), B(-1,5) και Γ(3,3).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

β) Αν M είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε να υπολογίσετε:

i. Τις συντεταγμένες του M.

ii. Την εξίσωση της διαμέσου AM.

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (-1 - 1, 5 - 7) = (-2, -2)$ και $\overrightarrow{AG} = (3 - 1, 3 - 7) = (2, -4)$.

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 8 + 4 = 12, \text{ άρα } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})| = 6.$$

β) i. Είναι $x_M = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$, $y_M = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4$, άρα M(1,4).

ii. Παρατηρούμε ότι για τα σημεία A και M είναι $x_M = x_A = 1$. Επομένως, η ευθεία AM είναι κατακόρυφη (δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας), οπότε έχει εξίσωση $x = 1$.

16771. Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $\Gamma(4,-1)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$.

α) Να βρεθεί το σημείο B .

β) Αν $B(5,0)$:

i. Να δείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - 2, y_B - 1) = (3, -1) \Leftrightarrow (x_B - 2 = 3 \Leftrightarrow x_B = 5)$ και $(y_B - 1 = -1 \Leftrightarrow y_B = 0)$, άρα $B(5,0)$.

β) i. Είναι $\overrightarrow{A\Gamma} = (4 - 2, -1 - 1) = (2, -2)$, $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$.

Επειδή $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2 = -4 \neq 0$ τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία A, B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = 2$.

16774. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2,5)$, $B(3,6)$ και $\Gamma(-1,-2)$.

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$.

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το A .

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) $\lambda_{B\Gamma} = \frac{-2-6}{-1-3} = 2$.

β) Έστω AK το ύψος από το A . Τότε $AK \perp B\Gamma$, οπότε $\lambda_{AK} \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow 2\lambda_{AK} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AK} = -\frac{1}{2}$.

Η εξίσωση της ευθείας AK θα είναι: $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 6$.

γ) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{6-5}{3-2} = 1$ και ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η AB με τον $x'x$,

δηλαδή: $\epsilon\phi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$.

16810. Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία

$A(1,1)$, $B(5,2)$, $\Gamma(0,-2)$ και $\Delta(8,0)$.

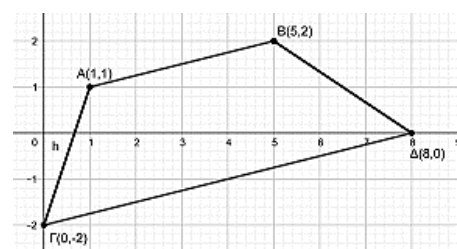
α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α).

Λύση

α) Τοποθετούμε τα σημεία στο επίπεδο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για να είναι το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ τραπέζιο αρκεί να αποδείξουμε ότι οι πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες και οι πλευρές $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται.

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{2-1}{5-1} = \frac{1}{4}$ και $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{0+2}{8-0} = \frac{1}{4}$, άρα $AB \parallel \Gamma\Delta$.



$$\lambda_{\text{AG}} = \frac{-2-1}{0-1} = 3 \text{ και } \lambda_{\text{BA}} = \frac{0-2}{8-1} = -\frac{2}{7}, \text{ άρα } \lambda_{\text{AG}} \neq \lambda_{\text{BA}} \Leftrightarrow \text{AG} \nparallel \text{BA}.$$

β) Για το εμβαδόν του τραπεζιού ABΔΓ έχουμε: $(\text{ABΔΓ}) = (\text{ABΔ}) + (\text{AΓΔ})$ (1).

Για τα εμβαδά των τριγώνων ABΔ και AΓΔ υπολογίζουμε πρώτα τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{AG}}, \overrightarrow{\text{AD}}$ και έχουμε:

$$\overrightarrow{\text{AG}} = (0-1, -2-1) = (-1, -3), \quad \overrightarrow{\text{AD}} = (8-1, 0-1) = (7, -1), \quad \overrightarrow{\text{AB}} = (5-1, 2-1) = (4, 1).$$

$$\text{Είναι } \det(\overrightarrow{\text{AG}}, \overrightarrow{\text{AD}}) = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 21 = 22, \text{ άρα } (\text{AΓΔ}) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{\text{AG}}, \overrightarrow{\text{AD}})| = 11 \text{ και}$$

$$\det(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -11, \text{ άρα } (\text{ABΔ}) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}})| = \frac{11}{2}.$$

$$\text{Είναι } (\text{ABΔΓ}) = \frac{11}{2} + 11 = \frac{33}{2}.$$

17805. Δίνεται το τρίγωνο AOB με A(3, 4), B(7, 1), O η αρχή των αξόνων και το σημείο

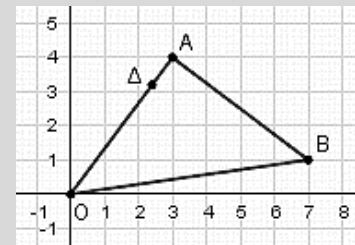
$$\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right) \text{ της πλευράς AO.}$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\text{OA}}$ και $\overrightarrow{\text{AD}}$.

β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{\text{AD}} = \frac{1}{5} \overrightarrow{\text{OA}}$.

γ) Δίνεται ότι $(\text{OAB}) = \frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Να δείξετε ότι $(\text{AΔB}) = \frac{1}{5}(\text{OAB})$.



Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{\text{OA}} = (3, 4), \quad \overrightarrow{\text{AD}} = \left(\frac{12}{5} - 3, \frac{16}{5} - 4\right) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$

β) $\overrightarrow{\text{AD}} = \left(\frac{12}{5} - 3, \frac{16}{5} - 4\right) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5}(3, 4) = -\frac{1}{5} \overrightarrow{\text{OA}}.$

γ) Είναι $\det(\overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AB}}) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = \frac{25}{5} = 5, \text{ άρα } (\text{AΔB}) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AB}})| = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} \text{ τ.μ. .}$

$$\text{Είναι } \frac{1}{5}(\text{OAB}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{2} = \frac{5}{2} = (\text{AΔB}).$$

18240. Δίνεται το σημείο A(1, 2) και η ευθεία (ε): $y = x + 3$.

α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε).

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε).

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η), (ε).

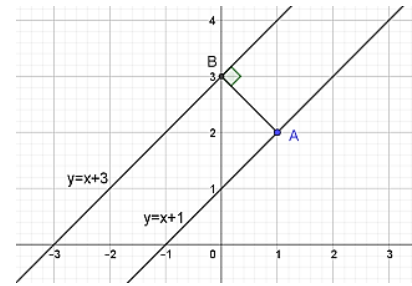
Λύση

18240.α) (ε): $y = x + 3 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|1 - 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow d(A, \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

β) Είναι $\eta // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\eta = \lambda_\varepsilon = 1$ και αφού η (η) διέρχεται από το $A(1, 2)$ θα έχει εξίσωση $y - 2 = x - 1 \Leftrightarrow y = x + 1$.

γ) Οι ευθείες (ε), (η) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



18733. Δίνονται τα σημεία $A(4, 3)$, $B(1, 1)$ και $\Gamma(6, 0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ είναι κάθετα.

γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA) = (MB)$.

Λύση

α) $\overrightarrow{AB} = (1 - 4, 1 - 3) = (-3, -2)$, $\overrightarrow{AG} = (6 - 4, 0 - 3) = (2, -3)$.

β) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = -3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -6 + 6 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AG}$.

γ) Είναι $(MA) = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 4\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} \Leftrightarrow (MA) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$,

$(MB) = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$, άρα $(MA) = (MB)$.

18979. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x + 3y = 5$ και $\varepsilon_2 : 4x + 6y = 8$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1, 1)$ είναι σημείο της ευθείας ε_1 .

γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_2 .

Λύση

α) Είναι $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ και $\lambda_2 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$. Επειδή $\lambda_1 = \lambda_2$, είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου $A(1, 1)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε_1 , αφού $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$. Άρα το σημείο A ανήκει στην ευθεία ε_1 .

γ) Είναι $d(A, \varepsilon_2) = \frac{|4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 8|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \frac{2}{\sqrt{52}} = \frac{2}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$.

20864. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

β) i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0, 6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 .

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 .

Λύση

α) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{2}{1} = -2$, οπότε είναι παράλληλες.

β) i. Το A ανήκει στην ε_1 όταν $2 \cdot 0 + 6 - 6 = 0$ που ισχύει.

ii. Είναι $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_2) = \frac{|2 \cdot 0 + 6 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

20885. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-3, -1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι: $E = 8$.

Λύση

α) Εφόσον η ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$, έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \tan \frac{3\pi}{4} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -1 \text{ και εξίσωση } y + 1 = -(x + 3) \Leftrightarrow y = -x - 4.$$

β) Από την εξίσωση της ευθείας ε για $x = 0$, το $y = -4$. Επίσης για $y = 0$, το $x = -4$. Άρα η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $K(-4, 0)$ και τον $y'y$ στο $\Lambda(0, -4)$.

$$\text{Είναι } (OK\Lambda) = \frac{1}{2}(OK)(O\Lambda) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

20926. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0, 2)$, $B(1, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της ε .

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B.

Λύση

α) Το B ανήκει στην ε όταν $1 - 2 \cdot 0 = 1$ που ισχύει

Αν το A ανήκε στην ε τότε $0 - 2 \cdot 2 = 1$ άτοπο, άρα το A δεν ανήκει στην ε .

$$\beta) d(A, \varepsilon) = \frac{|0 - 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

γ) Είναι $(AB) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5} = d(A, \varepsilon)$, οπότε η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B.

21260. Δίνεται η ευθεία (ε): $y - 2x = 0$ και τα σημεία $B(1, 1)$ και $\Gamma(-1, 3)$.

α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(5, 10)$ ανήκει στην ευθεία (ε).

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\hat{A}B\Gamma$.

Λύση

α) Το A ανήκει στην ευθεία, αν και μόνο αν $10 - 2 \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow 10 - 10 = 0$ ισχύει.

$$\beta) \overrightarrow{AB} = (1-5, 1-10) = (-4, -9), \overrightarrow{AG} = (-1-5, 3-10) = (-6, -7).$$

$$\gamma) \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 28 - 54 = -26, (AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})| = \frac{26}{2} = 13.$$

4ο Θέμα

14984. Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -3)$ και $B(7, 9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB) = 12$ τ.μ.

α) Να αποδείξετε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2) .

γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2 . Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2) , που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2 ; Εξηγήστε.

Λύση

α) Έστω $M(x, y)$. Είναι $\overrightarrow{AM} = (x+2, y+3)$, $\overrightarrow{AB} = (7+2, 9+3) = (9, 12)$ και

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x+2 & y+3 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 12x + 24 - 9y - 27 = 12x - 9y - 3.$$

$$(AMB) = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})| = 12 \Leftrightarrow |12x - 9y - 3| = 24 \Leftrightarrow 12x - 9y - 3 = \pm 24 \Leftrightarrow$$

$$(12x - 9y - 3 = 24 \Leftrightarrow 12x - 9y - 27 = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y - 9 = 0) \text{ ή }$$

$$(12x - 9y - 3 = -24 \Leftrightarrow 12x - 9y + 21 = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + 7 = 0) \text{ οι οποίες είναι εξισώσεις των ευθειών } (\varepsilon_1) \text{ και } (\varepsilon_2). \text{ Οι ευθείες είναι παράλληλες αφού έχουν κοινό συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{4}{3}.$$

β) Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB} = \frac{9+3}{7+2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, δηλαδή η AB είναι παράλληλη στις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$. Για να είναι η AB μεσοπαράλληλη των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αρκεί ένα οποιοδήποτε σημείο της να ισαπέχει από τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

$$\text{Είναι } d(A, \varepsilon_1) = \frac{|4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{5} \text{ και } d(A, \varepsilon_2) = \frac{|4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) + 7|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{5}, \text{ οπότε επειδή}$$

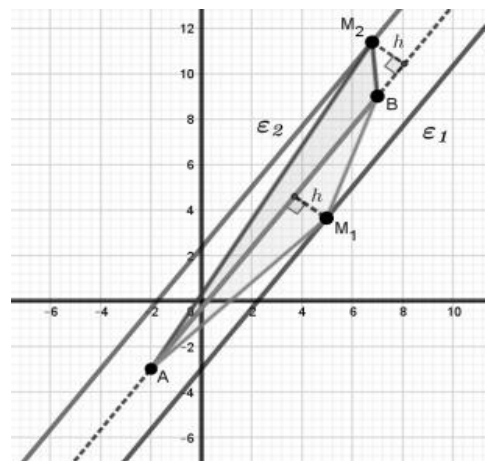
$d(A, \varepsilon_1) = d(A, \varepsilon_2)$ η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

γ) Με βάση το διπλανό σχήμα, διαπιστώνουμε ότι οποιοδήποτε σημείο M_1 της (ε_1) σχηματίζει με το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα AB , τρίγωνο σταθερού εμβαδού, αφού το ύψος h του τριγώνου AMB που αντιστοιχεί στην AB είναι σταθερό και ίσο με το μισό της απόστασης των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$, οπότε

$$(AM_1B) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \frac{8}{5} = 12 \text{ γιατί}$$

$$(AB) = \sqrt{(7+2)^2 + (9+3)^2} = \sqrt{225} = 15.$$

Ανάλογα, $(AM_2B) = 12$, έτσι $(AM_1BM_2) = 24$.



Ωστε $(AXBY) = 24$ για οποιαδήποτε σημεία X, Y των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, αρκεί να σχηματίζεται τετράπλευρο (να μην είναι για παράδειγμα τα σημεία M_1, B, M_2 συνευθειακά).

Άρα υπάρχουν άπειρα τετράπλευρα $AXBY$ με σταθερό εμβαδόν 24.

15194. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε $(KA) = (KB)$.

Τι ιδιότητα έχει το σημείο K ;

Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{4-1}{4-1} = 1$ και $\lambda_{B\Gamma} = \frac{1-4}{3-4} = \frac{-3}{-1} = 3$. Αφού $\lambda_{AB} \neq \lambda_{B\Gamma}$ τότε δεν είναι συνευθειακά.

β) Για το μέσο M της $B\Gamma$ έχουμε $x_M = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$ και $y_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$, άρα $M\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Αν (ε) είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$ τότε ισχύει $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow 3\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{1}{3}$.

Άρα έχουμε $(\varepsilon): y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

γ) Αφού το σημείο K είναι σημείο της (ε) τότε $K\left(x, -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}\right)$.

Είναι $(KA) = (KB) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + \left(4 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2} \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2 = (x-4)^2 + \left(4 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}\right)^2 = (x-4)^2 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 - (x-4)^2 = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 3(2x-5) = 3\left(\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow$

$2x-5 = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \Leftrightarrow 6x-15 = 2x-7 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=2$. Άρα $K\left(2, -\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{11}{3}\right) \equiv K(2, 3)$.

Το K ως σημείο της μεσοκαθέτου (ε) του $B\Gamma$ ισαπέχει από τα άκρα του B και Γ .

Άρα τελικά είναι $(KA) = (KB) = (K\Gamma)$ και τα A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου που ισαπέχουν από το K .

Επομένως το K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$, δηλαδή το περίκεντρο.

15273. Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3,4)$, $B(2,5)$ και $\Gamma(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha-1, 3\alpha+1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$. Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

Λύση

α) Είναι $\overline{AB} = (2-3, 5-4) = (-1, 1)$ $\overline{B\Gamma} = (-2-2, 2-5) = (-4, -3)$.

Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7 \neq 0$, οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ δεν είναι συνευθειακά, άρα τα σημεία A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Η ευθεία BΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{B\Gamma} = \lambda_{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{3}{4}$ και εξίσωση: $y - 5 = \frac{3}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$.

γ) Είναι $\begin{cases} x_M = 4\alpha - 1 \\ y_M = 3\alpha + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M = 12\alpha - 3 \\ -4y_M = -12\alpha - 4 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 3x_M - 4y_M = -7$.

Οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση $3x - 4y = -7 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$, οπότε τα σημεία M

κινούνται στην ευθεία $\varepsilon: y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$. Είναι $\lambda_\varepsilon = \lambda_{B\Gamma} = \frac{3}{4}$, οπότε $\varepsilon // B\Gamma$.

Ακόμη $3 \cdot 3 - 4 \cdot 4 = -7 \Leftrightarrow 9 - 16 = -7$ ισχύει, δηλαδή οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την ε , οπότε η ευθεία ε διέρχεται από το A.

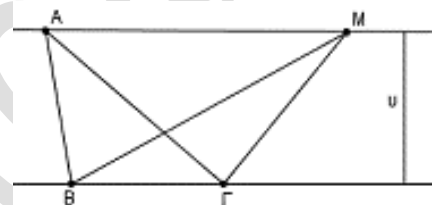
δ) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma})| = \frac{7}{2}$.

Είναι $\overrightarrow{BM} = (4\alpha - 3, 3\alpha - 4)$ και $\det(\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{BM}) = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4\alpha - 3 & 3\alpha - 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\det(\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{BM}) = -12\alpha + 16 + 12\alpha - 9 = 7$, άρα

$(B\Gamma M) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{BM})| = \frac{7}{2}$, οπότε $(AB\Gamma) = (B\Gamma M)$.

Τα εμβαδά των τριγώνων ABΓ, MBΓ είναι ίσα για οποιαδήποτε θέση του M, αφού τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση BΓ και το ύψος τους h είναι ίσο με την απόσταση των δυο παράλληλων ευθειών του σχήματος.



15380. Δίνονται τα σημεία A(1,3), B(-2,2) και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .

β) Για $\alpha = 4$

i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Λύση

α) Είναι $(AB) = d(A, \varepsilon) \Leftrightarrow \sqrt{(-2-1)^2 + (2-3)^2} = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + \alpha|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \Leftrightarrow$

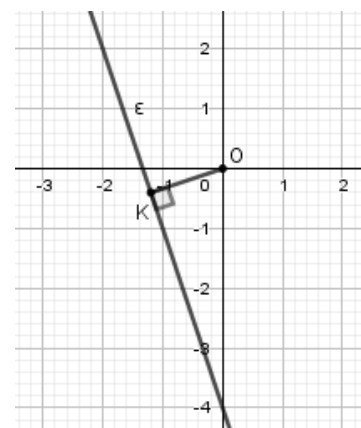
$$\sqrt{10} = \frac{|\alpha + 6|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |\alpha + 6| = 10 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + 6 = \pm 10 \Leftrightarrow (\alpha + 6 = 10 \Leftrightarrow \alpha = 4) \text{ ή } (\alpha + 6 = -10 \Leftrightarrow \alpha = -16).$$

β) i. Για $\alpha = 4$ είναι $\varepsilon: 3x + y + 4 = 0$.

Για $x = 0$ είναι $y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -4$ άρα $\Gamma(0, -4)$.

Είναι $\overrightarrow{AB} = (-2-1, 2-3) = (-3, -1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (0-1, -4-3) = (-1, -7)$.



$$\text{Είναι } \det(\overline{AB}, \overline{AG}) = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 1 = 20 \text{ και } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{AG})| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ τ.μ.}$$

γ) Έστω Κ η προβολή της αρχής Ο των αξόνων στην ευθεία ε. Το ζητούμενο σημείο είναι το Κ το οποίο είναι το σημείο τομής της ε με την ευθεία ΟΚ.

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{3}{1} = -3$ και $OK \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{OK} \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow$

$$-3\lambda_{OK} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = \frac{1}{3}, \text{ άρα η ΟΚ έχει εξίσωση}$$

$$y = \frac{1}{3}x. \text{ Είναι } \begin{cases} y = \frac{1}{3}x \\ 3x + y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x \\ 3x + \frac{1}{3}x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x \\ \frac{10}{3}x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{2}{5} \\ x = -\frac{6}{5} \end{cases}, \text{ άρα}$$

$$K\left(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right).$$

15433. Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία Α(-1, -2) και Β(3, 1). Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση δ: $x + y - 1 = 0$.

α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ:

i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.

ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.

β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι ίσο με 8.

Λύση

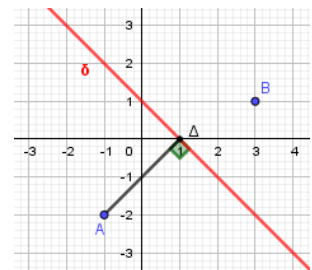
α) i. Γνωρίζουμε το κάθετο τμήμα από σημείο προς ευθεία έχει μικρότερο μήκος από οποιοδήποτε πλάγιο τμήμα, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο Δ που είναι η προβολή του Α στη δ.

$$\text{Είναι } \lambda_\delta = -\frac{1}{1} = -1, \text{ οπότε } \lambda_{\Delta\Delta} \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\Delta\Delta} = 1.$$

$$\text{Η ΑΔ έχει εξίσωση: } y + 2 = 1(x + 1) \Leftrightarrow y = x - 1$$

Οι συντεταγμένες του Δ είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x - 1 - 1 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 1 = 0 \end{cases}, \text{ άρα } \Delta(1, 0).$$



ii. Για να βρούμε τη θέση του κέντρου υγείας ψάχνουμε το σημείο της ευθείας δ που ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή το σημείο Κ που βρίσκεται πάνω στην ευθεία δ και στη μεσοκάθετο μ του ΑΒ.

Το μέσο Μ του ΑΒ έχει συντεταγμένες:

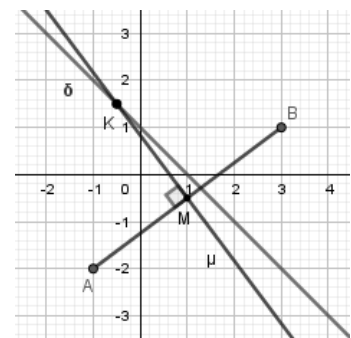
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \text{ και } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ δηλαδή } M\left(1, -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Είναι } \lambda_{AB} = \frac{1+2}{3+1} = \frac{3}{4} \text{ και } \mu \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{AB} \lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_\mu = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Η μεσοκάθετη } \mu \text{ έχει εξίσωση: } y + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{6}.$$

Οι συντεταγμένες του κέντρου υγείας Κ είναι η λύση του συστήματος:



$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8x+5-6=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=1 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \text{ Άρα } K\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

β) Έστω ότι το Γ έχει συντεταγμένες (x, y) , τότε επειδή είναι σημείο της ευθείας δ , ισχύει ότι $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$.

$$\text{Είναι } \overrightarrow{AB}=(4,3), \overrightarrow{A\Gamma}=(x+1, y+2)=(x+1, 1-x+2)=(x+1, 3-x).$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ x+1 & 3-x \end{vmatrix} = 12 - 4x - 3x - 3 = 9 - 7x.$$

$$(AB\Gamma) = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = 8 \Leftrightarrow |9 - 7x| = 16 \Leftrightarrow 9 - 7x = \pm 16 \Leftrightarrow$$

$$(9 - 7x = 16 \Leftrightarrow 9 - 16 = 7x \Leftrightarrow -7 = 7x \Leftrightarrow x = -1) \text{ ή } (9 - 7x = -16 \Leftrightarrow 25 = 7x \Leftrightarrow x = \frac{25}{7}).$$

$$\text{Αν } x = -1 \text{ τότε } \Gamma(-1, 2) \text{ και αν } x = \frac{25}{7}, \text{ τότε } \Gamma\left(\frac{25}{7}, -\frac{18}{7}\right).$$

15681. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B\left(\frac{\alpha}{2}, \beta\right)$ και $M\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ που

α, β , σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA .

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι $OB: 2\beta x - \alpha y = 0$ και $AB: 2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$ αντίστοιχα.

γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$.

δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } (OB) = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} - 0\right)^2 + (\beta - 0)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^2} \text{ και}$$

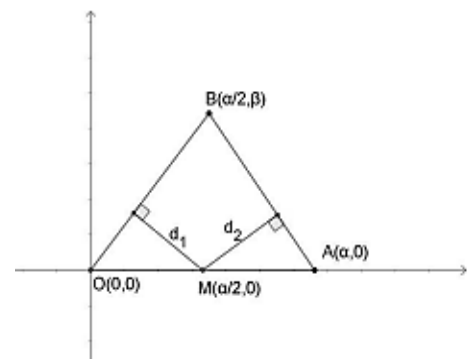
$$(BA) = \sqrt{\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + (\beta - 0)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^2}, \text{ άρα } (OB) = (BA)$$

οπότε το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με βάση την OA .

$$\beta) \text{ Η ευθεία } OB \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_{OB} = \frac{\beta - 0}{\frac{\alpha}{2} - 0} = \frac{2\beta}{\alpha}$$

$$\text{και εξίσωση } y = \frac{2\beta}{\alpha} x \Leftrightarrow 2\beta x - \alpha y = 0.$$

$$\text{Η ευθεία } AB \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_{AB} = \frac{\beta - 0}{\frac{\alpha}{2} - \alpha} = -\frac{2\beta}{\alpha} \text{ και εξίσωση}$$



$$y = -\frac{2\beta}{\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow 2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } d_1 = d(M, OB) = \frac{\left| 2\beta \frac{\alpha}{2} - \alpha \cdot 0 \right|}{\sqrt{(2\beta)^2 + (-\alpha)^2}} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2 + \alpha^2}} \text{ και}$$

$$d_2 = d(M, AB) = \frac{\left| 2\beta \frac{\alpha}{2} - \alpha \cdot 0 - 2\alpha\beta \right|}{\sqrt{(2\beta)^2 + \alpha^2}} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2 + \alpha^2}}, \text{ άρα } d_1 = d_2.$$

δ) Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αποδείχθηκε είναι η εξής: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το μέσο της βάσης ισαπέχει από τις ίσες πλευρές.

15692. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + y = x + 2xy + 6$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(x - y)^2 - (x - y) - 6 = 0$.

ii. Η εξίσωση παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, τις οποίες να βρείτε.

Έστω $\varepsilon_1: x - y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x - y + 2 = 0$ οι δυο παράλληλες ευθείες.

β) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M\left(\alpha, \alpha - \frac{1}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ισαπέχουν από τις δυο ευθείες.

γ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δυο ευθειών.

Λύση

α) i. $x^2 + y^2 + y = x + 2xy + 6 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - x + y - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 - (x - y) - 6 = 0$.

ii. Έστω $x - y = \omega$, τότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται $\omega^2 - \omega - 6 = 0 \Leftrightarrow \omega = 3$ ή $\omega = -2$, άρα $x - y = 3 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$ ή $x - y = -2 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$. Επομένως η εξίσωση παριστάνει τις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: x - y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x - y + 2 = 0$ ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$).

β) Είναι $d(M, \varepsilon_1) = \frac{\left| \alpha - \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) - 3 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| \alpha - \alpha + \frac{1}{2} - 3 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$ και

$$d(M, \varepsilon_2) = \frac{\left| \alpha - \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) + 2 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| \alpha - \alpha + \frac{1}{2} + 2 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}, \text{ άρα } d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2).$$

γ) Επειδή κάθε σημείο της μεσοπαράλληλης ισαπέχει από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, τα σημεία M βρίσκονται στη μεσοπαράλληλη.

Είναι $x_M = \alpha$, $y_M = \alpha - \frac{1}{2} = x_M - \frac{1}{2}$. Επειδή τα σημεία M επαληθεύουν την εξίσωση $y = x - \frac{1}{2}$, η μεσοπαράλληλη έχει εξίσωση $y = x - \frac{1}{2}$.

15987. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $(\varepsilon): y=2x-1$.

β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

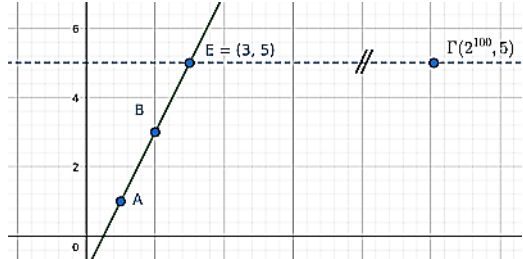
γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

Λύση

α) Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB} = \frac{3-1}{2-1} = 2$ και εξίσωση $y-1=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x-1$.

β) Το σημείο $E(3,5)$ ανήκει στην (ε) , διότι $2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Το σημείο Γ βρίσκεται στην ίδια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ την $y=5$ με το E και «δεξιά» από αυτήν, ενώ το σημείο $O(0,0)$ βρίσκεται στο άλλο ημιεπίπεδο, «αριστερά» από αυτήν, όπως βλέπουμε και στο επόμενο σχήμα.



γ) Τα τρίγωνα AOB και $AB\Gamma$ έχουν την ίδια βάση AB , με φορά την ευθεία (ε) . Η απόσταση του O και του Γ

αντίστοιχα από την (ε) είναι: $d(O, \varepsilon) = \frac{|2 \cdot 0 - 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

και $d(\Gamma, \varepsilon) = \frac{|2 \cdot 2^{100} - 5 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2^{101} - 6}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{5}}$. Επειδή $d(O, \varepsilon) < d(\Gamma, \varepsilon)$, το ύψος του τριγώνου OAB με βάση

την AB είναι μικρότερο από το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ με βάση την AB , οπότε $(O\Gamma) < (AB\Gamma)$.

16057. Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(3,4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ .

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A , έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B , έχει εξίσωση $(\varepsilon): 15x - 8y - 30 = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ) , εκτός από την (ε) , η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B .

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ) .

Λύση

α) i. Οι ευθείες που έχουν κλίση λ και διέρχονται από το σημείο A ορίζονται από την εξίσωση:

$(\varepsilon_\lambda): y - 0 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow \lambda x - y - 2\lambda = 0$.

ii. $d(B, \varepsilon_\lambda) = 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 3 - 4 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |\lambda - 4| = \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 = (\sqrt{\lambda^2 + 1})^2 \Leftrightarrow$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow -8\lambda = -15 \Leftrightarrow \lambda = \frac{15}{8}.$$

Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $(\varepsilon): \frac{15}{8}x - y - 2 \cdot \frac{15}{8} = 0 \Leftrightarrow 15x - 8y - 30 = 0$.

β) Από το σημείο A διέρχεται επίσης η κατακόρυφη ευθεία (ζ) , για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής

διεύθυνσης, με εξίσωση $x = 2$. Έτσι, έχουμε: $d(B, \zeta) = \frac{|1 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{1}} = 1$.

γ) Οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται, διότι έχουν κοινό σημείο το Α, αλλά δεν ταυτίζονται αφού $\lambda_\varepsilon = \frac{15}{8}$ και $(\zeta)/y'y$. Το σημείο Β απέχει ίση απόσταση από τις ευθείες (ε) και (ζ), επομένως ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας των δύο ευθειών. Επιπλέον ισχύει ότι $\lambda_{AB} = \frac{4-0}{3-2} = 4$.

17694. Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις Α και Β έχουν συντεταγμένες Α(3,6) και Β(7,-2).

α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή.

β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία Α, Β και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη.

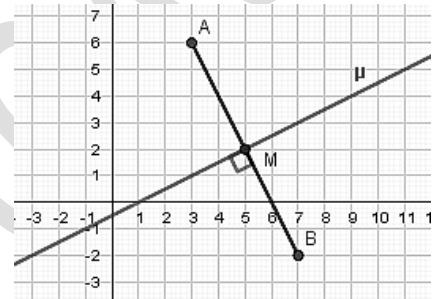
Λύση

α) Εφόσον τα σημεία της ευθείας ε πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή ισαπέχουν από τα Α, Β, αυτή θα είναι η μεσοκάθετος μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Αν Μ το μέσο του ΑΒ τότε: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 5$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2$, άρα Μ(5,2).

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{-2-6}{7-3} = -2$ και

$AB \perp \mu \Leftrightarrow \lambda_{AB} \lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow -2\lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow \lambda_\mu = \frac{1}{2}$, άρα

$\mu: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 5) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.



β) Έστω ότι το Σ έχει συντεταγμένες (x, y), τότε επειδή βρίσκεται στην ευθεία μ, ισχύει ότι

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}$, οπότε $\Sigma\left(x, \frac{x-1}{2}\right)$.

Είναι $\overrightarrow{AB} = (7-3, -2-6) = (4, -8)$, $\overrightarrow{AS} = \left(x-3, \frac{x-1}{2} - 6\right) = \left(x-3, \frac{x-13}{2}\right)$ και

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}) = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ x-3 & \frac{x-13}{2} \end{vmatrix} = 2(x-13) + 8(x-3) = 2x - 26 + 8x - 24 = 10x - 50$.

$(\Sigma AB) = 20 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS})| = 20 \Leftrightarrow |10x - 50| = 40 \Leftrightarrow 10x - 50 = \pm 40 \Leftrightarrow$

$(10x - 50 = 40 \Leftrightarrow 10x = 90 \Leftrightarrow x = 9)$ ή $(10x - 50 = -40 \Leftrightarrow 10x = 10 \Leftrightarrow x = 1)$.

Αν $x = 1$ τότε $\Sigma(1,0)$ και αν $x = 9$ τότε $\Sigma(9,4)$.

17695. Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία A και B. Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.
 β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;
 γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή $t=2$.
 δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου A από την ευθεία $\varepsilon: 4x+3y+7=0$ ισούται με 6.

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } \begin{cases} x_A = t-1 \\ y_A = 2t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x_A + 1 \\ y_A = 2(x_A + 1) - 1 \Leftrightarrow y_A = 2x_A + 1 \end{cases}.$$

$$\text{Είναι } t \geq 0 \Leftrightarrow x_A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x_A \geq -1 \text{ και } y_A = 2x_A + 1 \geq -2 + 1 = -1$$

Επειδή οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την εξίσωση $y = 2x + 1$ με $x \geq -1$ και $y \geq -1$ το A κινείται στη ημιευθεία που έχει αρχή το σημείο $A'(-1, -1)$ και εξίσωση $y = 2x + 1$.

$$\text{Είναι } \begin{cases} x_B = 3t-1 \\ y_B = -4t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x_B + 1}{3} \\ y_B = -4 \frac{x_B + 1}{3} - 1 = -\frac{4x_B + 7}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Είναι } t \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x_B + 1}{3} \geq 0 \Leftrightarrow x_B \geq -1 \text{ και } y_B = -\frac{4x_B + 7}{3} \geq -\frac{4(-1) + 7}{3} = -1.$$

Επειδή οι συντεταγμένες του B επαληθεύουν την εξίσωση $y = -\frac{4x+7}{3}$ με $x \geq -1$ και $y \geq -1$ το B κινείται στη ημιευθεία που έχει αρχή το σημείο $A'(-1, -1)$ και εξίσωση $y = -\frac{4x+7}{3}$.

β) Για να υπάρχει χρονική στιγμή $t \geq 0$, κατά την οποία τα σημεία A και B ταυτίζονται πρέπει

$$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 = 3t-1 \\ 2t-1 = -4t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 0 \\ 6t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0, \text{ άρα τη χρονική στιγμή } t = 0 \text{ τα A, B ταυτίζονται.}$$

$$\gamma) \text{ Για } t=2 \text{ είναι } A(1, 3) \text{ και } B(5, -9) \text{ οπότε: } (AB) = \sqrt{(5-1)^2 + (-9-3)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

$$\delta) d(A, \varepsilon) = 6 \Leftrightarrow \frac{|4(t-1) + 3(2t-1) + 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 6 \Leftrightarrow \frac{|4t-4+6t-3+7|}{5} = 6 \Leftrightarrow |10t| = 30 \Leftrightarrow 10t = 30 \Leftrightarrow t = 3.$$

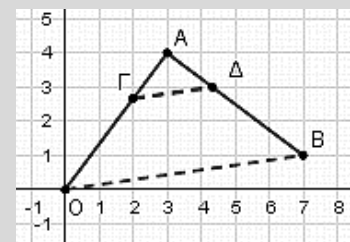
18732. Σε σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$ και $B(7, 1)$.

α) Αν $\Gamma\left(2, \frac{8}{3}\right)$ και $\Delta\left(\frac{13}{3}, 3\right)$ να δείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

ii. $\Gamma\Delta // OB$.

iii. Να δείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (AOB)$.



β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του α) ερωτήματος, αν για τα σημεία Γ και Δ ισχύουν

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{v} \overrightarrow{AO} \text{ και } \overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{v} \overrightarrow{AB}, \text{ να δείξετε ότι } \left(A\Gamma\Delta \right) = \left(\frac{1}{v} \right)^2 \left(ABO \right).$$

Λύση

α) i. Είναι $\overrightarrow{AO} = (0-3, 0-4) = (-3, -4)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \left(2-3, \frac{8}{3}-4 \right) = \left(-1, -\frac{4}{3} \right)$.

Είναι $\frac{1}{3} \overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(-3, -4) = \left(-1, -\frac{4}{3} \right) = \overrightarrow{A\Gamma}$.

Είναι $\overrightarrow{A\Delta} = \left(\frac{13}{3}-3, 3-4 \right) = \left(\frac{4}{3}, -1 \right)$, $\overrightarrow{AB} = (7-3, 1-4) = (4, -3)$, $\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(4, -3) = \left(\frac{4}{3}, -1 \right) = \overrightarrow{A\Delta}$.

ii. $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{3-\frac{8}{3}}{\frac{13}{3}-2} = \frac{\frac{9}{3}-\frac{8}{3}}{\frac{13}{3}-\frac{6}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{1}{7}$, $\lambda_{OB} = \frac{1-0}{7-0} = \frac{1}{7}$. Είναι $\lambda_{\Gamma\Delta} = \lambda_{OB} \Leftrightarrow \Gamma\Delta // OB$.

iii. $(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{A\Gamma} & \overrightarrow{A\Delta} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| 1 + \frac{16}{9} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{9} = \frac{25}{18}$,

$(ABO) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AO} & \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |9 + 16| = \frac{25}{2}$

$\left(\frac{1}{3} \right)^2 (AOB) = \frac{1}{9} \cdot \frac{25}{2} = \frac{25}{18} = (A\Gamma\Delta)$.

β) $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{v} \overrightarrow{AO} = \frac{1}{v}(-3, -4) = \left(-\frac{3}{v}, -\frac{4}{v} \right)$, $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{v} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{v}(4, -3) = \left(\frac{4}{v}, -\frac{3}{v} \right)$.

$(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{A\Gamma} & \overrightarrow{A\Delta} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -\frac{3}{v} & -\frac{4}{v} \\ \frac{4}{v} & -\frac{3}{v} \end{vmatrix} \right| = \frac{25}{2v^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{25}{2} = \left(\frac{1}{v} \right)^2 (ABO)$.

20655. Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(3,-1)$ και $\Gamma(-2,0)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με $\frac{9}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $\Delta(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(\Delta A\Gamma) = (AB\Gamma)$

γ) Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ του ερωτήματος (β) αποτελείται από τις ευθείες $\varepsilon_1: x-4y-7=0$ και $\varepsilon_2: x-4y+11=0$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A\Gamma$, ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

ii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x-4y-7=0$ και $x-4y+11=0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία $A\Gamma$ ».

Λύση

α) i. $\overrightarrow{AB} = (3-2, -1-1) = (1, -2)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (-2-2, 0-1) = (-4, -1)$.

Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9 \neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AG}$, οπότε τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

ii. $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})| = \frac{9}{2}$.

β) Είναι $\overrightarrow{AD} = (x-2, y-1)$, $\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -x+2+4(y-1) = -x+2+4y-4 = -x+4y-2$.

$$(\Delta A\Gamma) = (AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG})| = \frac{9}{2} \Leftrightarrow |-x+4y-2| = 9 \Leftrightarrow$$

$$(-x+4y-2=9 \Leftrightarrow -x+4y-11=0) \text{ ή } (-x+4y-2=-9 \Leftrightarrow -x+4y+7=0).$$

Ο γεωμετρικός τόπος του Δ αποτελείται από τα σημεία των παράλληλων ευθειών $\varepsilon_1: x-4y-7=0$ και $\varepsilon_2: x-4y+11=0$.

γ) i. Είναι $\lambda_{\overrightarrow{AG}} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{4}$, δηλαδή $\lambda_{\overrightarrow{AG}} = \lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} \parallel \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

ii. Η ευθεία AG έχει εξίσωση $y-1 = \frac{1}{4}(x-2) \Leftrightarrow 4y-4 = x-2 \Leftrightarrow x-4y+2=0$.

Ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στη μεσοπαράλληλο των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, αν και μόνο αν

$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|x_0 - 4y_0 - 7|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|x_0 - 4y_0 + 11|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} \Leftrightarrow |x_0 - 4y_0 - 7| = |x_0 - 4y_0 + 11| \Leftrightarrow$$

$$(\cancel{x_0} - 4\cancel{y_0} - 7 = \cancel{x_0} - 4\cancel{y_0} + 11 \text{ αδύνατη}) \text{ ή }$$

$$(x_0 - 4y_0 - 7 = -x_0 + 4y_0 - 11 \Leftrightarrow 2x_0 - 8y_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 4y_0 + 2 = 0).$$

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του M ικανοποιούν την εξίσωση της AG, οπότε η AG είναι η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

20724. Η ευθεία ε με εξίσωση $x+y-1=0$ του παρακάτω σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων $A(8,1)$, $B(-7,4)$ (για την ακρίβεια A, B είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις). Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής (ε), ένας σταθμός σε ένα σημείο Σ και μία πεζογέφυρα σε ένα σημείο Π. Να βρείτε :

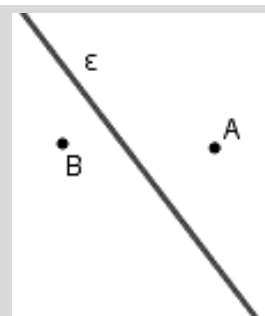
α) ποια πόλη από τις A, B είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου.

β) τις συντεταγμένες του Π, αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο της γραμμής στην πόλη B.

γ) τις συντεταγμένες του Σ στις παρακάτω περιπτώσεις

i. ο σταθμός Σ να ισαπέχει από τις πόλεις A, B.

ii. το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό Σ με τις πόλεις A, B να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.



Λύση

α) Η απόσταση της πόλης Α από την ε είναι $d(A, \varepsilon) = \frac{|8+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ και η

απόσταση της πόλης Β από την ε είναι $d(B, \varepsilon) = \frac{|-7+4-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Επειδή $d(B, \varepsilon) < d(A, \varepsilon)$, η πόλη Β είναι πιο κοντά στην ε .

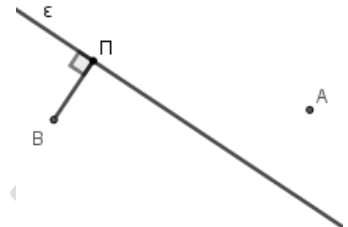
β) Το πλησιέστερο σημείο της ε στη πόλη Β είναι η προβολή Σ του Β στην ε .

Είναι $\lambda_{\varepsilon} = \frac{-1}{1} = -1$ και $B\Sigma \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{B\Sigma} \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Sigma} = 1$.

Η ΒΣ έχει εξίσωση $y - 4 = x + 7 \Leftrightarrow y = -x + 11$.

$$\begin{cases} y = x + 11 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 11 \\ x + x + 11 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 11 \\ 2x = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 + 11 = 6 \\ x = -5 \end{cases}, \text{ άρα}$$

$\Pi(-5, 6)$



γ) i. Έστω $\Sigma(x, y)$, τότε επειδή είναι σημείο της ε , ισχύει ότι $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x$ (1).

$$\text{Είναι } (A\Sigma) = (B\Sigma) \Leftrightarrow \sqrt{(x-8)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+7)^2 + (y-4)^2} \Leftrightarrow$$

$$(x-8)^2 + (y-1)^2 = (x+7)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 14x + 49 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow$$

$$-30x + 6y = 0 \Leftrightarrow 6y = 30x \Leftrightarrow y = 5x \Leftrightarrow 1 - x = 5x \Leftrightarrow 6x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \text{ και } y = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \text{ άρα } \Sigma\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right).$$

ii. Έστω ότι η ΑΒ τέμνει την ε στο Σ.

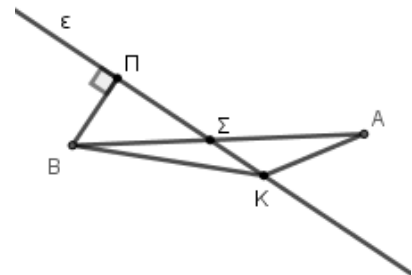
ΑΝ θεωρήσουμε οπουδήποτε σημείο Κ της ε διαφορετικό του Σ, τότε από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΚΑΒ ισχύει ότι $AB < KA + KB \Leftrightarrow \Sigma A + \Sigma B < KA + KB$, οπότε το άθροισμα των αποστάσεων του σταθμού από τις πόλεις Α και Β γίνεται ελάχιστο μόνο στη θέση Σ.

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{4-1}{-7-8} = -\frac{1}{5}$ και η ΑΒ έχει εξίσωση:

$$y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 8) \Leftrightarrow 5y - 5 = -x + 8 \Leftrightarrow x + 5y - 13 = 0.$$

Για τις συντεταγμένες του Σ έχουμε:

$$\begin{cases} x + 5y - 13 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 - 5x - 13 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = 8 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + 2 = 3 \end{cases}, \text{ άρα } \Sigma(-2, 3).$$



20728. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $\varepsilon_2: y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια με τον άξονα xx' .

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου $O(0, 0), A(3, \sqrt{3}), B(3, 3)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

Λύση

20728.α) Για $x = 3$ είναι $y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = \sqrt{3}$, οπότε $A(3, \sqrt{3})$

σημείο της ε_1 , οπότε η ε_1 είναι η OA .

Για $x = 3$ είναι $y = 3$, οπότε $B(3, 3)$ σημείο της ε_2 , οπότε η ε_2 είναι η OB .

β) Αν ω_1 είναι η γωνία που σχηματίζει η ε_1 με τον x' , τότε

$$\varepsilon\omega_1 = \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \omega_1 = 30^\circ.$$

Αν ω_2 είναι η γωνία που σχηματίζει η ε_2 με τον x' , τότε

$$\varepsilon\omega_2 = \lambda_2 = 1 \Leftrightarrow \omega_2 = 45^\circ.$$

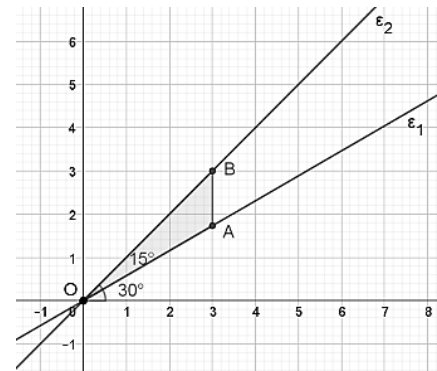
$$\gamma) \overrightarrow{OA} = (3, \sqrt{3}), \overrightarrow{OB} = (3, 3), \det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 3\sqrt{3} = 3(3 - \sqrt{3}).$$

$$(OAB) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})| = \frac{1}{2} \cdot 3(3 - \sqrt{3}) = \frac{3}{2}(3 - \sqrt{3}).$$

$$\delta) (OAB) = \frac{1}{2} (OA)(OB) \eta\mu AOB \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \eta\mu 15^\circ = \frac{3}{2}(3 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{12} \cdot \sqrt{18} \cdot \eta\mu 15^\circ = 3(3 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \eta\mu 15^\circ = 3(3 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow 6\sqrt{6} \eta\mu 15^\circ = 3(3 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 15^\circ = \frac{3(3 - \sqrt{3})}{6\sqrt{6}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})\sqrt{3}}{2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3})^2} \Leftrightarrow \eta\mu 15^\circ = \frac{3\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{\cancel{3}(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2} \cdot \cancel{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$



20861. Δίνεται το σημείο $M(-2, 2)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο M .

β) i. Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy .

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1), η οποία διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy τρίγωνο, με εμβαδόν $E = 8$.

γ) Αν (ε_1): $y = x + 4$, να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η (ε_1) με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή O .

Λύση

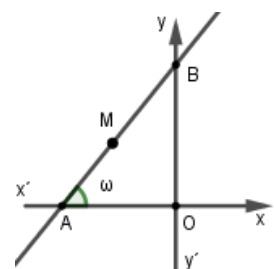
α) Αν η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , τότε έχει εξίσωση: $y - 2 = \lambda(x + 2) \Leftrightarrow y = \lambda x + 2\lambda + 2$, ενώ αν δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης θα έχει εξίσωση $x = -2$.

β) i. Η ευθεία $x = -2$ δεν τέμνει τον Oy οπότε απορρίπτεται.

Επειδή η ε τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy , η γωνία ω που σχηματίζει με τον x' είναι οξεία, οπότε $\lambda = \varepsilon\omega > 0$.

ii. Για $y = 0$ η ε γίνεται $0 = \lambda x + 2\lambda + 2 \Leftrightarrow x = -\frac{\lambda + 2}{\lambda}$, άρα $A\left(-\frac{2\lambda + 2}{\lambda}, 0\right)$.

Για $x = 0$ είναι $y = 2\lambda + 2$.



$$E = (OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2} \left| -\frac{2\lambda+2}{\lambda} \right| |2\lambda+2| \stackrel{\lambda>0}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{2\lambda+2}{\lambda} \cdot (2\lambda+2) = \frac{2(\lambda+1)^2}{\lambda}.$$

$$E = 8 \Leftrightarrow \frac{2(\lambda+1)^2}{\lambda} = 8 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 4\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1,$$

$$\text{άρα } \varepsilon: y = x + 2 + 2 \Leftrightarrow y = x + 4.$$

γ) Για $\lambda = 1$ είναι $A(-4,0)$, $B(0,4)$ και το ύψος u με βάση την AB είναι

$$u = d(O, \varepsilon_1) = \frac{|0 - 0 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

20939. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι τοποθετημένα 7 χωριά ως σημεία του επιπέδου και μια πηγή νερού σε ένα σημείο Π . Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 αγωγοί νερού που συνδέουν την πηγή με έξι από τα παραπάνω χωριά. Οι αγωγοί αυτοί ανήκουν στις γραμμές με εξισώσεις της μορφής: $(\lambda+1)x + (\lambda-1)y + 2 = 0$, με $\lambda \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

α) Να αποδείξετε ότι και οι 6 γραμμές είναι ευθείες.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Π .

γ) Το έβδομο χωριό βρίσκεται στο σημείο $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι κανένας από τους παραπάνω αγωγούς νερού δεν διέρχεται από το χωριό αυτό.

δ) Προκειμένου να έχει πρόσβαση στο νερό το χωριό O , υπάρχουν δύο επιλογές:

1^η επιλογή: Να συνδέσουμε απευθείας το χωριό O με την πηγή

2^η επιλογή: Να συνδέσουμε το χωριό O με έναν από τους παραπάνω αγωγούς μέσω της συντομότερης διαδρομής.

Με δεδομένο ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές είναι το ίδιο,

i. να βρείτε την τιμή του λ για την οποία οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής.

ii. Πως εξηγείται γεωμετρικά το συμπέρασμα;

Λύση

α) Η εξίσωση $(\lambda+1)x + (\lambda-1)y + 2 = 0$ δεν είναι ευθεία όταν $\begin{cases} \lambda+1=0 \\ \lambda-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-1 \\ \lambda=1 \end{cases}$ αδύνατο, οπότε είναι εξίσωση ευθείας για κάθε $\lambda \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

β) Για $\lambda = 0$ είναι $x - y + 2 = 0$ και για $\lambda = 1$ είναι $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$.

Δύο από τους αγωγούς έχουν εξισώσεις $x - y + 2 = 0$, $x = -1$ και η πηγή Π είναι το κοινό σημείο των

$$\text{αγωγών, άρα } \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - y + 2 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}, \text{ δηλαδή } \Pi(-1,1).$$

γ) Κάποιος από τους αγωγούς $(\lambda+1)x + (\lambda-1)y + 2 = 0$ διέρχεται από το O , αν υπάρχει τιμή του λ για την οποία $(\lambda+1) \cdot 0 + (\lambda-1) \cdot 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$ αδύνατο. Επομένως το $O(0,0)$ δεν ανήκει σε κάποια από τις ευθείες.

δ) i. Η απόσταση του χωριού O από τη πηγή Π είναι $(O\Pi) = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, ενώ η απόσταση του O

$$\text{από τις ευθείες } \varepsilon: (\lambda+1)x + (\lambda-1)y + 2 = 0, \text{ είναι } d(O, \varepsilon) = \frac{|(\lambda+1) \cdot 0 - (\lambda-1) \cdot 0 + 2|}{\sqrt{(\lambda+1)^2 + (\lambda-1)^2}} \Leftrightarrow$$

$$d(O, \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \lambda^2 - 2\lambda + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2\lambda^2 + 2}} \Leftrightarrow$$

$$d(O, \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}.$$

$$d(O, \varepsilon) = (O\Pi) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Δηλαδή οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής για $\lambda=0$ και ο αγωγός με τον οποίο θα μπορούσε να συνδεθεί το χωριό O είναι αυτός που διέρχεται από την ευθεία $\varepsilon_1: x - y + 2 = 0$.

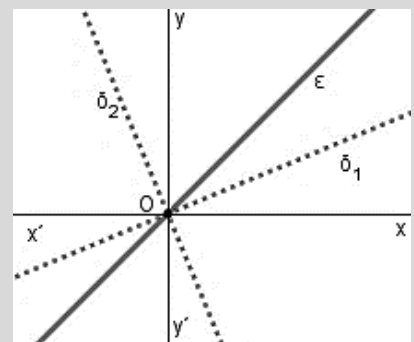
ii. Επειδή η απόσταση του O από την ε_1 είναι ίση με την απόσταση του O από το Π και το Π είναι σημείο της ε_1 , συμπεραίνουμε ότι το Π είναι η προβολή του O στην ε_1 .

22067. Θεωρούμε μία ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x$ με θετική κλίση λ .

α) Αν δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_1 είναι: $y = \lambda_1 x$ με $\lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}$.

β) Αν δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_2 είναι: $y = \lambda_2 x$ με $\lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 + \lambda^2}}$.

γ) Αν $\lambda = 1$, να εφαρμόσετε τους τύπους του α) ερωτήματος για να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$.



Λύση

α) Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στη διχοτόμο δ_1 , αν και μόνο αν $d(M, \varepsilon) = d(M, x'x) \Leftrightarrow$

$$\frac{|-\lambda x + y|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = |y| \Leftrightarrow \frac{-\lambda x + y}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \pm y \Leftrightarrow -\lambda x + y = \pm y \sqrt{1 + \lambda^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(-\lambda x + y = y \sqrt{1 + \lambda^2} \Leftrightarrow y \sqrt{1 + \lambda^2} - y = -\lambda x \Leftrightarrow y(\sqrt{1 + \lambda^2} - 1) = -\lambda x \Leftrightarrow y = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2} - 1} x \right) \text{ ή }$$

$$\left(-\lambda x + y = -y \sqrt{1 + \lambda^2} \Leftrightarrow y \sqrt{1 + \lambda^2} + y = \lambda x \Leftrightarrow y(\sqrt{1 + \lambda^2} + 1) = \lambda x \Leftrightarrow y = \frac{\lambda x}{\sqrt{1 + \lambda^2} + 1} \right).$$

Είναι $1 + \lambda^2 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + \lambda^2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + \lambda^2} - 1 > 0$, $\lambda > 0$, οπότε $-\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2} - 1} < 0$, άρα η εξίσωση

$y = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2} - 1} x$ δεν ανήκει στη δ_1 , αφού αυτή σχηματίζει οξεία γωνία με τον $x'x$ και $\lambda_1 = \varepsilon\varphi\omega_1 > 0$.

Άρα η δ_1 έχει εξίσωση $y = \lambda_1 x$ με $\lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}$.

β) Επειδή οι εξισώσεις $y = \frac{\lambda x}{\sqrt{1 + \lambda^2} + 1}$, $y = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2} - 1} x$ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζει η ε με τον $x'x$ και η δ_1 έχει τη πρώτη εξίσωση, η δ_2 έχει τη δεύτερη εξίσωση.

γ) Για $\lambda = 1$ είναι $\lambda_1 = \frac{1}{1+\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1} = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1 = \sqrt{2}-1$.

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$, τότε $\lambda = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$.

Επειδή η δ_1 είναι διχοτόμος της γωνίας ω , είναι $\omega_1 = 22,5^\circ$, άρα $\varepsilon\varphi 22,5^\circ = \sqrt{2}-1$.

22073. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $\Lambda(2,6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi(\lambda-1, 2+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του.

ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι.

β) i. Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:

i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι;

ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι.

Λύση

α) i. Για το σημείο Π ισχύει ότι $\begin{cases} x_{\Pi} = \lambda - 1 \\ y_{\Pi} = 2 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\Pi} + 1 = \lambda \\ y_{\Pi} = 2 + x_{\Pi} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\Pi} + 1 = \lambda \\ y_{\Pi} = x_{\Pi} + 3 \end{cases}$.

Επειδή οι συντεταγμένες του Π επαληθεύουν την εξίσωση $y = x + 3$, το πλοίο Π κινείται στην ευθεία αυτή.

ii. Το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι αν οι συντεταγμένες του λιμανιού $\Lambda(2,6)$ επαληθεύουν την εξίσωση της τροχιάς του, δηλαδή την εξίσωση $x - y + 3 = 0$. Για $y = 6$ και $x = 2$ έχουμε $2 - 6 + 3 = -1 \neq 0$.

Άρα το πλοίο δεν θα περάσει από το λιμάνι.

β) i. Η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι είναι το μήκος του κάθετου τμήματος $\Lambda\Pi$, με Π το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία η που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το Λ .

Είναι $d(\Lambda, \varepsilon) = \frac{|2 - 6 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow d(\Lambda, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ii. Η ευθεία ζ είναι κάθετη στην ε , άρα

$\lambda_{\zeta} \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\zeta} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\zeta} = -1$ και η εξίσωση της είναι

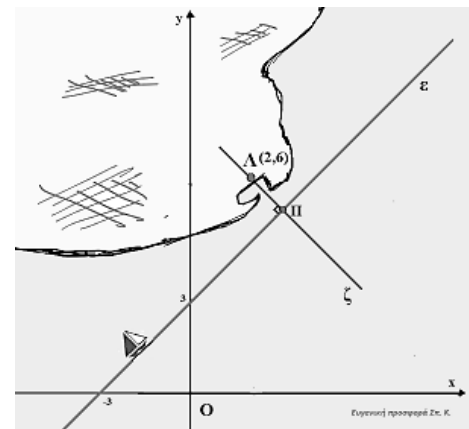
$y - 6 = -(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 8$.

Η θέση του πλοίου είναι το κοινό σημείο των ευθειών ε και η , που προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους.

$\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + x + y = -3 + 8 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x = 5 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2} \end{cases}$. Άρα όταν το πλοίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι βρίσκεται

στο σημείο $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$.



22262. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(5, -1)$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή A . Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας $B\Gamma$, από το οποίο, το A απέχει την ελάχιστη απόσταση.

δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $(MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$.

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (1+2, 5-1) = (3, 4)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (5+2, -1-1) = (7, -2)$

$$\text{και } \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 28 = -34.$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = 17.$$

β) Είναι $\lambda_{B\Gamma} = \frac{-1-5}{5-1} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ και

$$B\Gamma: y - 5 = -\frac{3}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$$

γ) Έστω $A\Delta$ το ύψος του τριγώνου από την κορυφή A . Είναι

$$A\Delta \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} \lambda_{A\Delta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta} = \frac{2}{3}.$$

Το ύψος $A\Delta$ έχει εξίσωση: $y - 1 = \frac{2}{3}(x + 2) \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

Το σημείο της ευθείας $B\Gamma$ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το A , είναι το ίχνος Δ , του ύψους από το A στην ευθεία $B\Gamma$. Από το σύστημα των $B\Gamma$, $A\Delta$ έχουμε

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 14 = -9x + 39 \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 25 \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{13} \\ y = \frac{2}{3} \cdot \frac{25}{13} + \frac{7}{3} = \frac{47}{13} \end{cases},$$

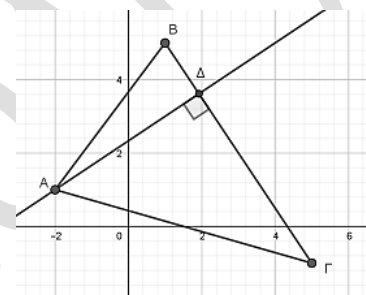
$$\text{άρα } \Delta\left(\frac{25}{13}, \frac{47}{13}\right).$$

δ) Έστω $M(x, y)$. Είναι $\overrightarrow{AM} = (x+2, y-1)$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x+2 & y-1 \end{vmatrix} = 3y - 3 - 4x - 8 = 3y - 4x - 11$.

$$(MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{2}|3y - 4x - 11| = \frac{1}{2} \cdot 17 \Leftrightarrow |3y - 4x - 11| = 17 \Leftrightarrow$$

$$(3y - 4x - 11 = 17 \Leftrightarrow 3y - 4x - 28 = 0) \text{ ή } (3y - 4x - 11 = -17 \Leftrightarrow 3y - 4x + 6 = 0)$$

Άρα το σημείο M ανήκει στην ευθεία $\varepsilon_1: 4x - 3y - 6 = 0$ ή $\varepsilon_2: 4x - 3y + 28 = 0$.



22265. Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(\mu-1, 3\mu-2)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 1$.

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό.

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο B και από τις οποίες το σημείο A , απέχει απόσταση ίση με 1.

Λύση

α) Αν $\Gamma(x, y)$ τότε: $\begin{cases} x = \mu - 1 \\ y = 3\mu - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \mu \\ y = 3(x + 1) - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu - 1 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$, επομένως το σημείο Γ κινείται στην ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 1$.

β) Είναι $\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 2 + 1) = (1, 3)$, $\overrightarrow{AG} = (\mu - 1 - 1, 3\mu - 2 + 1) = (\mu - 2, 3\mu - 1)$.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \mu - 2 & 3\mu - 1 \end{vmatrix} = 3\mu - 1 - 3\mu + 6 = 5 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AG}$ οπότε τα σημεία A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά.

γ) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})| = \frac{5}{2} = \text{σταθερό για κάθε } \mu \in \mathbb{R}.$

δ) Από το σημείο $B(2, 2)$ διέρχονται οι ευθείες $\delta': x = 2$ και $\delta: y - y_B = \lambda(x - x_B) \Leftrightarrow y - 2 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow \lambda x - y + 2 - 2\lambda = 0$.

Είναι: $d(A, \delta') = |2 - x_A| = |2 - 1| = 1$, οπότε η ευθεία $\delta': x = 2$ αποτελεί μια λύση στο πρόβλημα.

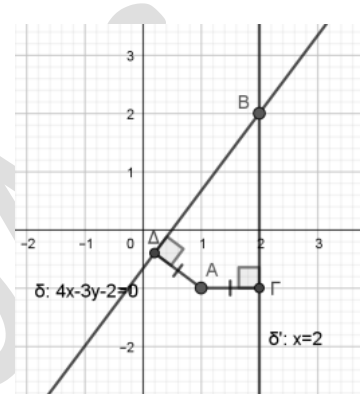
Θα αναζητήσουμε αν στην οικογένεια ευθειών δ , υπάρχει και άλλη ευθεία που να αποτελεί λύση στο πρόβλημα.

$$\text{Είναι } d(A, \delta) = \frac{|\lambda \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 2 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{|\lambda + 1 + 2 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{|3 - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

$$\text{Είναι } d(A, \delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|3 - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |3 - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$(3 - \lambda)^2 = (\sqrt{\lambda^2 + 1})^2 \Leftrightarrow 9 - 6\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow 8 = 6\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Τότε } \delta: \frac{4}{3}x - y + 2 - 2 \cdot \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y - 2 = 0$$



22266. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0$ (E) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x - 8y + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (E) παριστάνει ευθεία.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (E), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (E) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε);

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(1, 3)$ από την ευθεία (ζ).

Λύση

α) Η (E) δεν ήταν εξίσωση ευθείας για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $\begin{cases} 2\lambda + 1 = 0 \\ \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = 2 \end{cases}$ άτοπο.

Επομένως η εξίσωση (E) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda = 2$ η (E) γίνεται $5x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Για $\lambda = -\frac{1}{2}$ η (E) γίνεται $-\left(-\frac{1}{2} - 2\right)y - \frac{1}{2} - 7 = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}y - \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow 5y = 15 \Leftrightarrow y = 3$.

Οι ευθείες $x=1$ και $y=3$ που είναι δύο από τις ευθείες (E) τέμνονται στο σημείο $M(1,3)$, για να διέρχονται όλες οι ευθείες της (E) από το M πρέπει:
 $(2\lambda+1) \cdot 1 - (\lambda-2) \cdot 3 + \lambda - 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda+1-3\lambda+6+\lambda-7=0$ που ισχύει.

γ) Η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (-8, -6)$.

Οι ευθείες της οικογένειας ευθειών (E), είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{\delta}_2 = (-\lambda+2, -2\lambda-1)$.

$$\varepsilon // \zeta \text{ αν και μόνο αν } \vec{\delta}_1 // \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ -\lambda+2 & -2\lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 16\lambda+8-6\lambda+12=0 \Leftrightarrow 10\lambda=-20 \Leftrightarrow \lambda=-2.$$

Τότε η (E) γίνεται: $3x+4y-9=0$ που είναι η ζητούμενη ευθεία.

$$\delta) \text{ Είναι } (\zeta): 6x-8y+3=0, \text{ οπότε } d(M, \zeta) = \frac{|6 \cdot 1 - 8 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

3ο Θέμα

15152. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+y+\alpha=0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου A από το σημείο B.

β) Για ποιες τιμές του α , η απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .

γ) Για $\alpha=4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

Λύση

$$\alpha) (AB) = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}.$$

$$\beta) d(A, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + \alpha|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|\alpha+6|}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Είναι } d(A, \varepsilon) = (AB) \Leftrightarrow \frac{|\alpha+6|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |\alpha+6| = 10 \Leftrightarrow (\alpha+6=10 \Leftrightarrow \alpha=4) \text{ ή } (\alpha+6=-10 \Leftrightarrow \alpha=-16).$$

$$\gamma) \text{ Για } \alpha=4 \text{ είναι } \varepsilon: 3x+y+4=0.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ η } \varepsilon \text{ γίνεται } y+4=0 \Leftrightarrow y=-4, \text{ άρα } \Gamma(0, -4).$$

$$\text{Είναι } \overrightarrow{AB} = (-2-1, 2-3) = (-3, -1), \overrightarrow{A\Gamma} = (0-1, -4-3) = (-1, -7), \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = 21-1=20$$

$$\text{οπότε } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ τ.μ.}$$

Κωνικές τομές

Κύκλος

2ο Θέμα

15028. Έστω κύκλος C με κέντρο K(1,2) και ακτίνα $\rho=2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x + 4y - 1 = 0$.

- α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.
 β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K(1,2) από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.
 γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

Λύση

α) Είναι $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

β) Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$.

γ) Αφού $d(K, \varepsilon) = 2 = \rho$ τότε η (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

15680. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο K(1, 2) και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 1 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$.
 β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.
 γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

Λύση

α) Είναι $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2^2$, οπότε ο κύκλος C έχει ακτίνα $\rho = 2$.

β) Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5}$.

γ) Επειδή η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου, η ε είναι εξωτερική του κύκλου, οπότε δεν έχουν κοινά σημεία.

15994. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ (1).

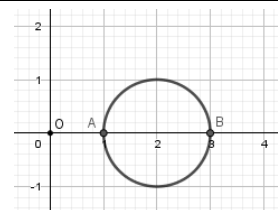
- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
 β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες.

Λύση

α) Είναι $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + y^2 = 4 - 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1$,

άρα η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο K(2,0) και ακτίνα $\rho = 1$.

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι ο κύκλος τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία A(1,0) και B(3,0).



16773.α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

β) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο A .

ii. Να βρεθεί το σημείο B , το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο.

Λύση

α) Αν ρ η ακτίνα του κύκλου, τότε $\rho = (OA) = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 5$.

β) i. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $x \cdot 1 + y \cdot 2 = 5 \Leftrightarrow x + 2y = 5$.

ii. Επειδή το κέντρο O είναι το μέσο του τμήματος AB , ισχύει ότι

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{1 + x_B}{2} \Leftrightarrow 1 + x_B = 0 \Leftrightarrow x_B = -1 \text{ και}$$

$$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{2 + y_B}{2} \Leftrightarrow 2 + y_B = 0 \Leftrightarrow y_B = -2, \text{ άρα } B(-1, -2).$$

16808. Τα σημεία $A(-8, 1)$, $B(4, 5)$ και $\Gamma(-4, 9)$ είναι σημεία ενός κύκλου C .

α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C .

Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε ότι το μέσο K του τμήματος AB απέχει από το σημείο Γ απόσταση ίση με $\frac{AB}{2}$.

$$\text{Είναι } x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = -2, y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = 3, \text{ άρα } K(-2, 3).$$

$$\text{Είναι } (AB) = \sqrt{(4+8)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ και}$$

$$(K\Gamma) = \sqrt{(-2+4)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = \frac{AB}{2}.$$

β) Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(-2,3)$ και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{10}$, άρα η εξίσωση του κύκλου είναι $C: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 40$.

17317. Δίνεται ο κύκλος $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 8$.

α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του.

β) Αν $K(1,2)$, να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι

$$d(K, \varepsilon) = \frac{13}{5}.$$

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Λύση

α) Ο κύκλος έχει κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

$$\text{β) } d(K, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{13}{5}.$$

γ) Επειδή $d(K, \varepsilon) = \frac{13}{5} > \rho = 2$ η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.

18238. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB .

β) Να αποδείξετε ότι $(KA) = \sqrt{5}$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB .

Λύση

α) Είναι $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = -1$, $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = 4$, άρα $K(-1,4)$.

β) $(KA) = \sqrt{(1+1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$.

γ) Ο κύκλος διαμέτρου AB έχει κέντρο K και ακτίνα $\rho = (KA) = \sqrt{5}$ άρα έχει εξίσωση $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$.

18239. Δίνεται το σημείο $K(-3,1)$ και η ευθεία $(\varepsilon) : 4x - 3y + 5 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε) .

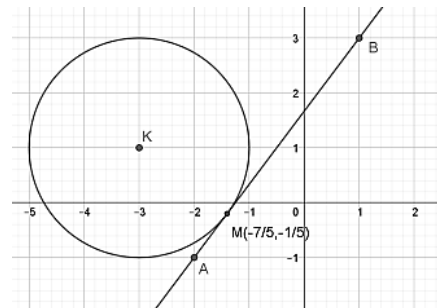
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε) .

Λύση

α) $d(K, \varepsilon) = \frac{|4 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{5} = 2$.

β) Ο ζητούμενος κύκλος έχει ακτίνα $\rho = d(K, \varepsilon) = 2$ και εξίσωση $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$.

γ) Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία $A(-2,-1)$ και $B(1,3)$, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση της. Ο κύκλος C και η ευθεία (ε) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



18241. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

α) τον κύκλο C .

β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον $y'y$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

Λύση

α) Ο κύκλος C , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

Τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι τα σημεία $A(5,0)$ και $B(-5,0)$ ενώ τα σημεία τομής με τον άξονα $y'y$ είναι τα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$.

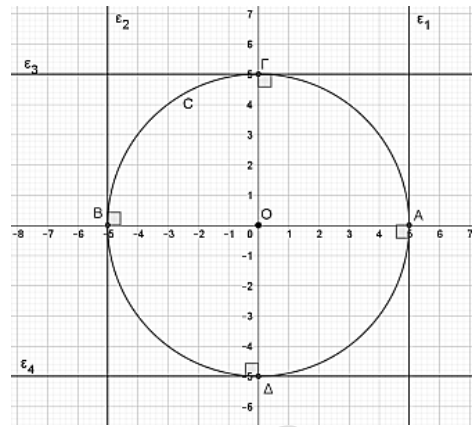
β) Αναζητούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$.

Οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες στον $y'y$ οπότε παράλληλες στον $x'x$ και διέρχονται από τα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$, άρα έχουν εξισώσεις $y = 5$ και $y = -5$ αντίστοιχα.

Είναι οι ευθείες $\varepsilon_3, \varepsilon_4$, που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

γ) Αναζητούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A(5,0) και B(-5,0).

Οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες στον $x'x$ οπότε παράλληλες στον $y'y$ και διέρχονται από τα σημεία A(5,0) και B(-5,0), άρα έχουν εξισώσεις $x = 5$ και $x = -5$ αντίστοιχα. Είναι οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



18700. Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

β) Δίνεται το σημείο A(3, -4).

i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C.

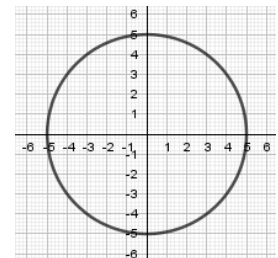
ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A.

Λύση

α) C: $x^2 + y^2 = 25$.

β) i. Το σημείο A ανήκει στον κύκλο όταν $3^2 + (-4)^2 = 25 \Leftrightarrow 9 + 16 = 25$ ισχύει.

ii. $x \cdot 3 + y(-4) = 25 \Leftrightarrow 3x - 4y = 25$.

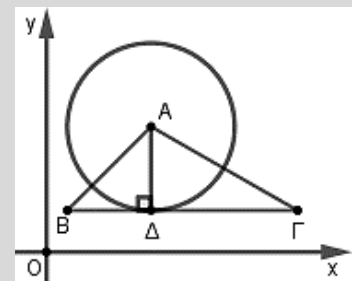


18749. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο ABΓ ώστε A(5, 6), B(1, 2), Γ(12, 2) και το ύψος του AΔ, όπου Δ σημείο της BΓ, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών BΓ και AΔ.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο A, ο οποίος εφάπτεται της ευθείας BΓ στο σημείο Δ.



Λύση

α) Επειδή τα σημεία B, Γ έχουν τεταγμένη 2, η ευθεία BΓ έχει εξίσωση $y = 2$. Επειδή η AΔ είναι κάθετη στη BΓ και διέρχεται από το A(5, 6) έχει εξίσωση $x = 5$.

β) Το Δ είναι το σημείο τομής των BΓ: $y = 2$ και AΔ: $x = 5$, άρα Δ(5,2).

γ) Η ακτίνα του κύκλου είναι η AΔ και έχει μήκος $\rho = (A\Delta) = 6 - 2 = 4$, οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

18968. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$: (1).

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο $K(3, 4)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K του κύκλου από την ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y = 0$ ισούται με 5 μονάδες μήκους.

γ) Να δικαιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός:

«Ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται».

Λύση

$$\alpha) x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 9 + 16 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

Ο κύκλος C έχει κέντρο $K(3, 4)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

$$\beta) d(K, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

γ) Επειδή $d(K, \varepsilon) = 5 = \rho$, ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται.

19039. Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x+3) + (y+1)(y-3) = -4$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $R = 2$.

β) i. Να βρείτε τα σημεία A και B του κύκλου (K, R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1.

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά.

Λύση

$$\alpha) (x-1)(x+3) + (y+1)(y-3) = -4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - x - 3 + y^2 - 3y + y - 3 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2^2 \quad (2).$$

Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $R = 2$.

β) i. Η εξίσωση (2) γίνεται για $x = -1$:

$$(-1+1)^2 + (y-1)^2 = 2^2 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 2^2 \Leftrightarrow y-1 = \pm 2 \Leftrightarrow y = 3 \text{ ή } y = -1$$

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι: $A(-1, -1)$ και $B(-1, 3)$.

ii. Τα σημεία A και B βρίσκονται στην ευθεία $x = -1$, η οποία διέρχεται από το κέντρο K του κύκλου. Επομένως, τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

20890. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία $A(3, -3)$, $B(2, -8)$ και $\Gamma(7, -3)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς BΓ.

β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην πλευρά BΓ.

Λύση

$$\alpha) \text{ Η BΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda = \frac{-3+8}{7-2} = 1 \text{ και εξίσωση } y+8 = (x-2) \Leftrightarrow x-y-10=0.$$

$$\beta) \text{ Η ακτίνα } \rho \text{ του κύκλου είναι } \rho = d(A, B\Gamma) = \frac{|3 - (-3) - 10|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ και η εξίσωση του είναι:}$$

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+3)^2 = 8.$$

21962. Δίνονται τα σημεία $A(0,3)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(1,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $BA\Gamma$ είναι ορθή.

β) Να βρείτε το μέσο K της υποτείνουσας $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ .

Λύση

α) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{4-3}{3-0} = \frac{1}{3}$, $\lambda_{A\Gamma} = \frac{0-3}{1-0} = -3$. Είναι $\lambda_{AB}\lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow AB \perp A\Gamma \Leftrightarrow BA\Gamma = 90^\circ$.

β) Είναι $x_K = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$, $y_K = \frac{y_\Gamma + y_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$, άρα $K(2,2)$.

γ) Επειδή $BA\Gamma = 90^\circ$, είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο, συνεπώς η υποτείνουσα $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, θα είναι διάμετρος του κύκλου και ισούται με: $(B\Gamma) = \sqrt{(1-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ θα έχει ακτίνα $R = \frac{(B\Gamma)}{2}$ και κέντρο το σημείο K , οπότε η εξίσωσή του είναι: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$.

21965. Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$ και $B(0, -2)$

α) Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB .

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

γ) Αν (ζ): $y = x - 4$ και (ϵ): $y = 2x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ), (ϵ).

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A , B και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (ϵ) είναι η $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$.

Λύση

α) Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$, $y_M = \frac{-4-2}{2} = -3$, άρα $M(1, -3)$.

β) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{-2+4}{0-2} = -1$ και $(\zeta) \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\zeta \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = 1$.

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του τμήματος AB είναι: $y + 3 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 4$.

γ) το σημείο τομής των ευθειών (ϵ) και (ζ) θα έχει συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = 2x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 = x - 4 \\ y = 2x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 6 = -2 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το σημείο $(2, -2)$.

δ) Το κέντρο K του κύκλου θα πρέπει να ανήκει ταυτόχρονα στη μεσοκάθετο του τμήματος AB , την ευθεία (ζ) και στην ευθεία (ϵ) άρα θα πρέπει να είναι το σημείο τομής τους που βρήκαμε στο ερώτημα β), δηλαδή το $K(2, -2)$. Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = (KA) = (KB)$ αλλά

$$\rho = (KB) = \sqrt{(2-0)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Η εξίσωση του κύκλου είναι: $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$.

22056. Έστω Ω το σύνολο όλων των σημείων (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

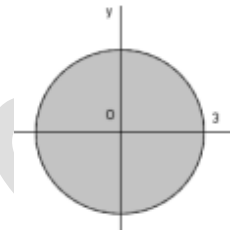
$$x^2 + y^2 \leq 9.$$

α) Να σχεδιάσετε το σύνολο Ω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy .

β) Υπάρχει σημείο A στο σύνολο Ω τέτοιο ώστε $|\overrightarrow{OA}| = 4$, όπου O η αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) 1^{ος} τρόπος: Αφού $x^2 + y^2 \leq 9$ καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για όλους τους κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho \in (0, 3]$ καθώς και την αρχή των αξόνων. Άρα το σύνολο των σημείων αυτών αποτελούν τον κυκλικό δίσκο (μαζί με την περιφέρειά του) που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 3.



2^{ος} τρόπος: Είναι $x^2 + y^2 \leq 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 \Leftrightarrow (OM) \leq 3$ με $M(x, y)$ άρα πρόκειται για όλα τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση μικρότερη ή ίση του 3.

β) Όχι διότι είναι $|\overrightarrow{OA}| = 4$ άρα το A απέχει από την αρχή των αξόνων 4 και δεν ανήκει στο σύνολο Ω .

22147. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K, R) .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K, R) στο A .

Λύση

α) Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 1 + 1 + 14 = 16 > 0$, επομένως, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ ή $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

β) Επειδή $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{4} - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$ ισχύει,

οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου, το σημείο A είναι σημείο του κύκλου (K, R) .

γ) Η εφαπτομένη του κύκλου (K, R) στο A είναι κάθετη στην ακτίνα KA . Αφού είναι $x_K = x_A$, η ακτίνα KA είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, οπότε η εφαπτομένη του κύκλου στο A θα είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Άρα, θα έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{2}$.

22172. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 0$ και το σημείο $A(-2, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου A από την ευθεία είναι 2.

β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο A .

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην ευθεία (ε) .

Λύση

$$\alpha) d(A, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

$$\beta) \text{ Είναι } \varepsilon: 3x - 4y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x \text{ με } \lambda_{\varepsilon} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Είναι } \eta \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\eta} \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \lambda_{\eta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\eta} = -\frac{4}{3} \text{ και } \eta \text{ (}\eta\text{) έχει εξίσωση:}$$

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}.$$

$$\gamma) \text{ Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι } \rho = d(A, \varepsilon) = 2, \text{ οπότε η εξίσωσή του είναι } (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

22279. Δίνεται η εξίσωση $(y - 1)^2 = (3 + x)(1 - x)$ (1). Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $R = 2$.

β) Η αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K, R) .

γ) Η ευθεία $(\varepsilon): x + y = 2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K, R) .

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) (y - 1)^2 &= (3 + x)(1 - x) \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 3 - 3x + x - x^2 \Leftrightarrow \\ (y - 1)^2 + x^2 + 2x &= 3 \Leftrightarrow (y - 1)^2 + x^2 + 2x + 1 = 4 \Leftrightarrow (y - 1)^2 + (x + 1)^2 = 2^2. \end{aligned}$$

Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $R = 2$

$$\beta) \text{ Είναι } (KO) = \sqrt{(0 + 1)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{2} < 2 = R, \text{ άρα η αρχή } O \text{ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου } (K, R).$$

$$\gamma) \text{ Υπολογίζουμε την απόσταση του κέντρου } K \text{ του κύκλου από την ευθεία } (\varepsilon) \text{ με εξίσωση } x + y - 2 = 0.$$

$$\text{Είναι: } d(K, \varepsilon) = \frac{|-1 + 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < R = 2, \text{ άρα η ευθεία } (\varepsilon) \text{ είναι τέμνουσα του κύκλου } (K, R).$$

4ο Θέμα

14954. Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0 \text{ και } (\varepsilon_2): (\mu+1)x + (\mu-1)y - \mu + 1 = 0, \mu \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ .

β) Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45° για κάθε τιμή της παραμέτρου μ .

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

Λύση

α) Κάθε μία από τις εξισώσεις (ε_1) και (ε_2) είναι στη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$, εξίσωση που γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία όταν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$. Παρατηρούμε ότι στην (ε_1) είναι $B = -1 \neq 0$ ενώ στην (ε_2) είναι $A = \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = -1$, ενώ $B = \mu - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$. Επειδή δεν υπάρχει τιμή της παραμέτρου μ η οποία να μηδενίζει ταυτόχρονα τους συντελεστές A και B , η (ε_2) είναι εξίσωση ευθείας για κάθε τιμή της παραμέτρου μ .

β) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$. Άρα το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (1, \mu)$ είναι παράλληλο στην (ε_1) και το $\vec{\delta}_2 = (1 - \mu, 1 + \mu)$ παράλληλο στην (ε_2) . Οπότε η οξεία γωνία θ των (ε_1) και (ε_2) θα είναι ίση ή παραπληρωματική της οξείας γωνίας φ των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \cos(\hat{\vec{\delta}}_1, \vec{\delta}_2) &= \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{\|\vec{\delta}_1\| \|\vec{\delta}_2\|} = \frac{1 \cdot (1 - \mu) + \mu(1 + \mu)}{\sqrt{1^2 + \mu^2} \sqrt{(1 - \mu)^2 + (1 + \mu)^2}} \Leftrightarrow \\ \cos(\hat{\vec{\delta}}_1, \vec{\delta}_2) &= \frac{1 - \mu + \mu + \mu^2}{\sqrt{1^2 + \mu^2} \sqrt{1 - 2\mu + \mu^2 + 1 + 2\mu + \mu^2}} \Leftrightarrow \\ \cos(\hat{\vec{\delta}}_1, \vec{\delta}_2) &= \frac{1 + \mu^2}{\sqrt{1^2 + \mu^2} \sqrt{2 + 2\mu^2}} \Leftrightarrow \cos(\hat{\vec{\delta}}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{1 - \mu + \mu + \mu^2}{\sqrt{1^2 + \mu^2} \sqrt{1 - 2\mu + \mu^2 + 1 + 2\mu + \mu^2}} \Leftrightarrow \\ \cos(\hat{\vec{\delta}}_1, \vec{\delta}_2) &= \frac{1 + \mu^2}{\sqrt{1^2 + \mu^2} \sqrt{2(1 + \mu^2)}} = \frac{1 + \mu^2}{\sqrt{1^2 + \mu^2} \sqrt{2} \sqrt{1 + \mu^2}} \Leftrightarrow \\ \cos(\hat{\vec{\delta}}_1, \vec{\delta}_2) &= \frac{1 + \mu^2}{(\sqrt{1^2 + \mu^2})^2 \sqrt{2}} = \frac{1 + \mu^2}{(1 + \mu^2) \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα } \hat{\theta} = (\hat{\vec{\delta}}_1, \vec{\delta}_2) = 45^\circ. \end{aligned}$$

γ) Για να βρούμε που τέμνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (ε_1) και (ε_2) . Ένας τρόπος είναι με την μέθοδο της αντικατάστασης. Από την (ε_1) παίρνουμε $y = \mu x - \mu$ οπότε αντικαθιστώντας στην (ε_2) παίρνουμε

$$(\mu + 1)x + (\mu - 1)(\mu x - \mu) - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow (\mu + 1)x + \mu(\mu - 1)x - \mu(\mu - 1) - \mu + 1 = 0 \text{ άρα}$$

$$(\mu + 1 + \mu^2 - \mu)x - \mu^2 + \mu - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}. \text{ Τότε } y = \mu \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} - \mu = \frac{-2\mu}{\mu^2 + 1}.$$

$$\text{Έτσι τα σημεία τομής των } (\varepsilon_1) \text{ και } (\varepsilon_2) \text{ είναι τα } \Sigma \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}, \frac{-2\mu}{\mu^2 + 1} \right), \mu \in \mathbb{R}.$$

Ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Σ επαληθεύουν την εξίσωση αυτή.

$$\text{Είναι } \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{-2\mu}{\mu^2 + 1} \right)^2 = \frac{\mu^4 - 2\mu^2 + 1}{(\mu^2 + 1)^2} + \frac{4\mu^2}{(\mu^2 + 1)^2} = \frac{\mu^4 - 2\mu^2 + 1 + 4\mu^2}{(\mu^2 + 1)^2} = \frac{\mu^4 + 2\mu^2 + 1}{(\mu^2 + 1)^2} = \frac{(\mu^2 + 1)^2}{(\mu^2 + 1)^2} = 1.$$

15030. Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία $\epsilon: 2x + y + 5 = 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ϵ) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1), (\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ϵ) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1), (\eta_2)$.

Λύση

α) Κέντρο $K(2, -3)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

β) $d(K, \epsilon) = \frac{|2 \cdot 2 - 3 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} > \sqrt{5} = \rho$, άρα η ευθεία ϵ και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Κάθε ευθεία (η) παράλληλη στην (ϵ) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία (ϵ), δηλαδή $\lambda_\eta = -2$, οπότε η (η) έχει εξίσωση της μορφής $y = -2x + \beta \Leftrightarrow 2x + y - \beta = 0$.

Για να εφάπτεται η ευθεία (η) στον κύκλο πρέπει και αρκεί να απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου δηλαδή

$$d(K, \eta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 2 + 1(-3) - \beta|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |1 - \beta| = 5 \Leftrightarrow 1 - \beta = \pm 5 \Leftrightarrow \beta = -4 \text{ ή } \beta = 6.$$

Άρα έχουμε δύο εφαπτομένες, τις $(\eta_1): 2x + y + 4 = 0$ και $(\eta_2): 2x + y - 6 = 0$.

Η μεσοπαράλληλη των $(\eta_1), (\eta_2)$ έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με αυτές, δηλαδή $\lambda_\eta = -2$ και διέρχεται από το K , άρα έχει εξίσωση: $y + 3 = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 1$.

15080. Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ (1) και $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ (2).

α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1,0)$, $\Lambda(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα.

β) i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου $(K\Lambda)$.

ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 .

Λύση

α) Είναι $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + y^2 = 8 + 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 3^2$

άρα η (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 3$.

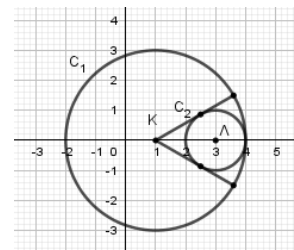
Είναι $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + y^2 = 9 - 8 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 1$

άρα η (2) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $\Lambda(3,0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$.

β) i. $(K\Lambda) = |3 - 1| = 2$

ii. Είναι $(K\Lambda) = 2$ και $\rho_1 - \rho_2 = 2$, άρα $(K\Lambda) = \rho_1 - \rho_2$ οπότε ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

γ) Κάθε ακτίνα του κύκλου C_1 , KA και KB σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, που δεν είναι κάθετη στον



χ'x άξονα, είναι πάνω σε ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $K(1,0)$ και έχει κλίση $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα κα έχει εξίσωση: $(\varepsilon): y - 0 = \lambda(x - 1) \Leftrightarrow -\lambda x + y + \lambda = 0$.

Η (ε) εφάπτεται στον κύκλο C_2 , αν και μόνο αν:

$$d(\Lambda, \varepsilon) = \rho_2 \Leftrightarrow \frac{|0 - 3\lambda + \lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = 1 \Leftrightarrow |2\lambda| = \sqrt{1 + \lambda^2} \Leftrightarrow 4\lambda^2 = 1 + \lambda^2 \Leftrightarrow 3\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Οι ζητούμενες ακτίνες έχουν εξισώσεις: $-\frac{\sqrt{3}}{3}x + y + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Leftrightarrow -x\sqrt{3} + 3y + \sqrt{3} = 0$ και

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x + y - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{3} + 3y - \sqrt{3} = 0.$$

15081. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K(-\sqrt{2}, 0)$, $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$ αντίστοιχα.

β) i. Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 .

ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες.

Λύση

α) $C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{2})^2 + y^2 = 1$, άρα ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(-\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 1$. $C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 9$, άρα ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 3$.

β) i. Μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και δεν είναι κάθετη στον χ'x άξονα έχει εξίσωση: $(\eta): y = \lambda x \Leftrightarrow -\lambda x + y = 0$.

Η ευθεία (η) εφάπτεται και στους δύο κύκλους αν και μόνο αν οι αποστάσεις των κέντρων K και Λ από την ευθεία αυτή είναι ίσες με τις αντίστοιχες ακτίνες των κύκλων. Δηλαδή έχουμε:

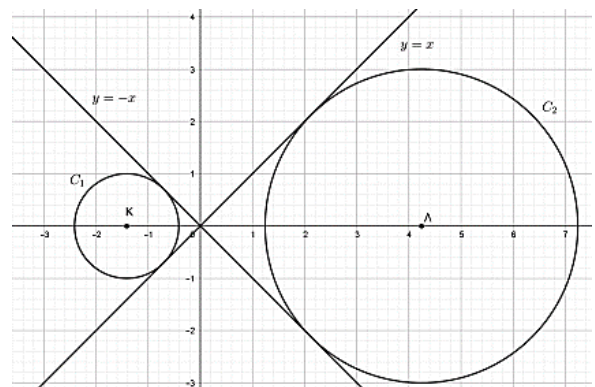
$$\begin{cases} d(K, \eta) = 1 \\ d(\Lambda, \eta) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|0 + \sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = 1 \\ \frac{|0 - 3\sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}|\lambda| = \sqrt{1 + \lambda^2} \\ 3\sqrt{2}|\lambda| = 3\sqrt{1 + \lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda^2 = 1 + \lambda^2 \\ 18\lambda^2 = 9 + 9\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Άρα, από την αρχή των αξόνων διέρχονται δυο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων, με εξισώσεις:

$(\eta_1): y = x$ και $(\eta_2): y = -x$.

ii. Η αρχή των αξόνων $(0, 0)$ είναι εσωτερικό σημείο της διακέντρου $K\Lambda$, διότι η $K\Lambda$ είναι πάνω στον άξονα χ'x και έχει άκρα τα σημεία $K(-\sqrt{2}, 0)$ και $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$.

.Επομένως οι εφαπτόμενες που βρήκαμε στο β) i) ερώτημα είναι εσωτερικές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



15082. Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8 \text{ και } C_2 : (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18.$$

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ), όπου Κ, Λ, τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 , αντίστοιχα. Ακολουθώντας να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

Λύση

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(2,3)$ και ακτίνα $\rho_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(7,-2)$ και ακτίνα $\rho_2 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Είναι $(ΚΛ) = \sqrt{(7-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Αφού η διάκεντρος των δύο κύκλων είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β) i. Η ευθεία ΚΛ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{ΚΛ} = \frac{-2-3}{7-2} = -1$ και εξίσωση $y-3 = -(x-2) \Leftrightarrow y = -x+5$.

$$\begin{aligned} \text{ii. Είναι } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8 \\ y = -x+5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (-x+5-3)^2 = 8 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} (x-2)^2 + (-x+2)^2 = 8 \\ y = -x+5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (x-2)^2 = 8 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2)^2 = 8 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} (x-2)^2 = 4 \\ y = -x+5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \pm 2 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}. \end{aligned}$$

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 είναι τα $A(4,1)$ και $A'(0,5)$.

Για το σημείο επαφής των δύο κύκλων έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18 \\ y = -x+5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^2 + (-x+5+2)^2 = 18 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^2 + (-x+7)^2 = 18 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 2(x-7)^2 = 18 \\ y = -x+5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^2 = 9 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = \pm 3 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -5 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_2 είναι τα $A(4,1)$ και $A''(10,5)$.

Η κοινή λύση των δύο συστημάτων είναι το ζητούμενο σημείο επαφής των δύο κύκλων. Άρα το κοινό σημείο της ευθείας και με τους δύο κύκλους είναι το $A(4,1)$, οπότε είναι το σημείο επαφής.

γ) Η κοινή εσωτερική εφαπτομένη (η) των δύο κύκλων είναι κάθετη στην ευθεία ΚΛ και διέρχεται από το σημείο επαφής $A(4,1)$. Στο ερώτημα β) i έχουμε βρει ότι $\lambda_{ΚΛ} = -1$, οπότε $\lambda_{ΚΛ} \lambda_{\eta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\eta} = 1$ και η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων έχει εξίσωση: $y-1 = x-4 \Leftrightarrow y = x-3$.

15177. Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση

$$c_1: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\overline{NA}^2 - \overline{NB}^2 = 4$, ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y = -x - 2$.

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων P του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0$, ανήκουν σε κύκλο c_2 κέντρου $\Lambda\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας

$$R = 2\sqrt{2}.$$

γ) i. Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2 .

Λύση

$$\alpha) \overline{NA}^2 - \overline{NB}^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2 + (y+1)^2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - x^2 - (y^2 + 2y + 1) = 4 \Leftrightarrow -2x + 1 + y^2 - y^2 - 2y - 1 = 4 \Leftrightarrow -2y = 2x + 4 \Leftrightarrow y = -x - 2.$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία ανήκουν σε ευθεία (ε) με εξίσωση $y = -x - 2$.

$$\beta) 2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 5x + 7y + \frac{21}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + y^2 + 2 \cdot \frac{7}{2}y = -\frac{21}{2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{7}{2}y + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -\frac{21}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = -\frac{42}{4} + \frac{25}{4} + \frac{49}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{116}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = 8.$$

Άρα τα σημεία R ανήκουν σε κύκλο c_2 , με κέντρο $\Lambda\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R = 2\sqrt{2}$.

γ) i. Ο κύκλος c_1 έχει κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

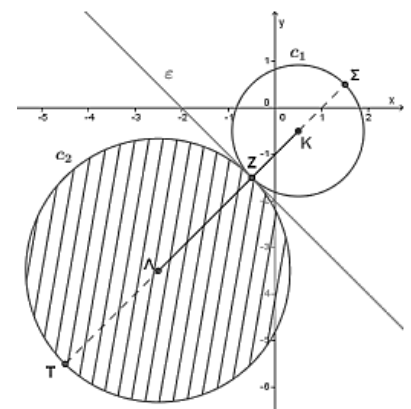
Είναι $(K\Lambda) = \sqrt{\left(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = R + \rho$, οπότε οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

$d(c_1, c_2)_{\max} = (K\Lambda) + R + \rho = 6\sqrt{2}$ και η ελάχιστη απόσταση των δύο κύκλων είναι μηδέν αφού εφάπτονται.

ii. $(\varepsilon): y = -x - 2 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$.

$$\text{Είναι } d(K, \varepsilon) = \frac{\left|1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \rho, \text{ άρα η } \varepsilon \text{ εφάπτεται στον } c_1.$$

$$\text{Είναι } d(\Lambda, \varepsilon) = \frac{\left|1 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) + 2\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = R, \text{ άρα η } \varepsilon \text{ εφάπτεται στο κύκλο } c_2.$$



15189. Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB .

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση $C: x^2 + (y+1)^2 = 5$.

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x + 2y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y + 7 = 0$.

δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C .

Λύση

α) Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 0$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = -1$, άρα $K(0, -1)$.

$$(AB) = \sqrt{(2+2)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

β) $C: (x-0)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 5$.

γ) Είναι $\overrightarrow{AM} = (x+2, y)$, $\overrightarrow{AB} = (2+2, -2-0) = (4, -2)$ και

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x+2 & y \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2x - 4 - 4y = -2(x + 2y + 2).$$

$$\text{Είναι } (AMB) = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})| = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 |x + 2y + 2| = 5 \Leftrightarrow |x + 2y + 2| = 5 \Leftrightarrow$$

$$(x + 2y + 2 = 5 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0) \text{ ή } (x + 2y + 2 = -5 \Leftrightarrow x + 2y + 7 = 0)$$

$$\delta) \text{ Είναι } d(K, \varepsilon_1) = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} = \rho \text{ και}$$

$$d(K, \varepsilon_2) = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} = \rho, \text{ άρα οι ευθείες } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ εφάπτονται του κύκλου } C.$$

15272. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το M .

Λύση

$$\alpha) x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 4 - 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4.$$

Η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

β) Είναι $(KM) = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} > 2 = \rho$, οπότε το σημείο M βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ) Αν η ζητούμενη εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , τότε η εξίσωσή της θα είναι της μορφής $\varepsilon: y - 2 = \lambda(x - 3) \Leftrightarrow \lambda x - y - 3\lambda + 2 = 0$.

$$\text{Η } \varepsilon \text{ εφάπτεται στον κύκλο, αν και μόνο αν } d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 1 - (-2) - 3\lambda + 2|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$|4-2\lambda| = 2\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow \cancel{2}|2-\lambda| = \cancel{2}\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = \lambda^2+1 \Leftrightarrow 4-4\lambda+\lambda^2 = \lambda^2+1 \Leftrightarrow 3=4\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Άρα } \varepsilon: \frac{3}{4}x - y - 3 \cdot \frac{3}{4} + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 1 = 0.$$

Όμως από το Μ διέρχονται δύο εφαπτομένες προς τον κύκλο. Από το Μ διέρχεται ακόμη η κατακόρυφη ευθεία $x = 3$ της οποίας η απόσταση από το κέντρο Κ του κύκλου είναι: $d = \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+0}} = 2 = \rho$, άρα η άλλη εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το Μ είναι η $x = 3$.

15432. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\kappa x - 2\kappa y + 4 = 0$ (1) με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

δ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $\Gamma(2,2)$.

Λύση

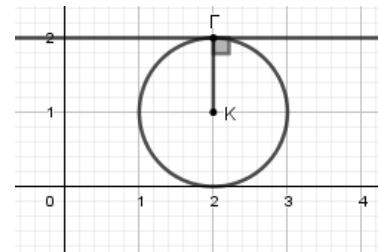
$$\begin{aligned} \alpha) \quad x^2 + y^2 - 4\kappa x - 2\kappa y + 4 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 4\kappa x + 4\kappa^2 + y^2 - 2\kappa y + \kappa^2 = 4\kappa^2 + \kappa^2 - 4 \Leftrightarrow \\ (x-2\kappa)^2 + (y-\kappa)^2 &= 5\kappa^2 - 4. \end{aligned}$$

$$\text{Η εξίσωση παριστάνει κύκλο όταν } 5\kappa^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \kappa^2 > \frac{4}{5} \Leftrightarrow |\kappa| > \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \kappa < -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ ή } \kappa > \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\beta) \text{ Για } \kappa < -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ ή } \kappa > \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ ο κύκλος έχει κέντρο } K(2\kappa, \kappa) \text{ και ακτίνα } \rho = \sqrt{5\kappa^2 - 4}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } x_K = 2\kappa \text{ και } y_K = \kappa, \text{ άρα } x_K = 2x_K = 2y_K \Leftrightarrow y_K = \frac{1}{2}x_K$$

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου Κ επαληθεύουν την εξίσωση $y = \frac{1}{2}x$, οπότε το Κ ανήκει στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.



$$\delta) \text{ Για } \kappa = 1 \text{ είναι } C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΓ που έχει εξίσωση $x = 2$, οπότε η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και επειδή η τεταγμένη του Γ είναι 2, είναι η ευθεία $y = 2$.

15628. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4-2k)x - 2(1+k)y + 5-2k = 0$ (I), όπου $k \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η (I) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k-2, k+1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$.

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } A^2 + B^2 - 4\Gamma = (4-2k)^2 + (-2(1+k))^2 - 4(5-2k) \Leftrightarrow$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 - 16k + 4k^2 + 4(1+2k+k^2) - 20 + 8k = \cancel{16} - \cancel{16k} + 4k^2 + \cancel{4} + \cancel{8k} + 4k^2 = 8k^2.$$

$$\text{Επειδή } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \text{ η (I) παριστάνει κύκλο με ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{2\sqrt{2}k}{2} = \sqrt{2}k \text{ και κέντρο}$$

$$M\left(-\frac{4-2k}{2}, -\frac{-2(1+k)}{2}\right) \equiv \left(-\frac{-2(k-2)}{2}, 1+k\right) \equiv (k-2, k+1).$$

β) Είναι $x_M = k-2 \Leftrightarrow x_M + 2 = k$ και $y_M = k+1 = x_M + 2 + 1 \Leftrightarrow y_M = x_M + 3$. Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου Κ επαληθεύουν την εξίσωση $y = x + 3$, οπότε το Μ ανήκει στην ευθεία $y = x + 3$.

γ) Η ευθεία $\varepsilon: y = -x - 1 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$ είναι εφαπτομένη του κύκλου, αν και μόνο αν

$$d(M, \varepsilon) = \rho = \sqrt{2}k.$$

$$\text{Είναι } d(M, \varepsilon) = \frac{|k-2+k+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2k}{\sqrt{2}} = \frac{2k\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2k\sqrt{2}}{2} = k\sqrt{2} = \rho, \text{ οπότε η } \varepsilon \text{ εφάπτεται του κύκλου για}$$

κάθε $k > 0$.

15646. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ και $C_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$.

α) Να δείξετε ότι τα κέντρα ΚΛ, των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας xOy του συστήματος συντεταγμένων.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής Β, Γ, των κύκλων C_1 και C_2 .

γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα ΒΓ, να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ..

Λύση

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο Κ(1,1) και ακτίνα $\rho_1 = 3$, ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο Λ(4,4) και ακτίνα $\rho_2 = 3$. Επειδή οι συντεταγμένες και των δύο σημείων Κ, Λ επαληθεύουν την εξίσωση $y = x$, τα κέντρα Κ, Λ, των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας xOy του συστήματος συντεταγμένων.

$$\text{β) } C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y = 7 \quad (1).$$

$$C_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 8y = -23 \quad (2).$$

Αφαιρώντας από την (1) την (2) κατά μέλη προκύπτει:

$$-2x - 2y + 8x + 8y = 7 + 23 \Leftrightarrow 6x + 6y = 30 \Leftrightarrow y = 5 - x \quad (3) \text{ και από την (1) έχουμε:}$$

$$x^2 + (5-x)^2 - 2x - 2(5-x) = 7 \Leftrightarrow x^2 + 25 - 10x + x^2 - 2x - 10 + 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 4.$$

Αν $x = 1$ τότε $y = 5 - 1 = 4$ και αν $x = 4$ τότε $y = 5 - 4 = 1$, οπότε κοινά σημεία των δύο κύκλων είναι τα Β(1,4) και Γ(4,1).

γ) Έστω Α(x,x) σημείο της $y = x$. Είναι $\overline{AB} = (1-x, 4-x)$ και $\overline{AG} = (4-x, 1-x)$.

$$\text{Είναι } \det(\overline{AB}, \overline{AG}) = \begin{vmatrix} 1-x & 4-x \\ 4-x & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - (4-x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\det(\overline{AB}, \overline{AG}) = 1 - 2x + x^2 - 16 + 8x - x^2 = 6x - 15.$$

$$(\overline{AB}\overline{G}) = \frac{21}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{AG})| = \frac{21}{2} \Leftrightarrow |6x - 15| = 21 \Leftrightarrow (6x - 15 = 21 \Leftrightarrow 6x = 36 \Leftrightarrow x = 6) \text{ ή}$$

$$(6x - 15 = -21 \Leftrightarrow 6x = -6 \Leftrightarrow x = -1). \text{ Άρα } A(6,6) \text{ ή } (-1,-1).$$

15993. Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.
γ) Αν $A(1,0)$ και $B(3,0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.
δ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$.

Λύση

α) Επειδή $\lambda^2 + 1 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(2, \lambda)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{\lambda^2 + 1}$.

β) Επιλέγουμε δύο από τους κύκλους (1), δίνοντας τις παρακάτω τιμές:
 Για $\lambda = 0$ είναι

$$(x-2)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x = -3 \quad (2)$$

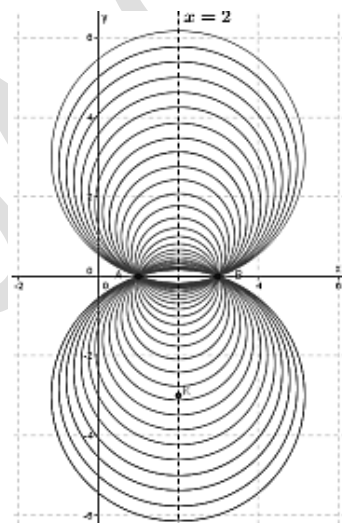
Για $\lambda = 1$ είναι $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = -3 \quad (3)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο ισότητες προκύπτει $y = 0$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση, είναι

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

Επομένως οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τα $A(1,0)$ και $B(3,0)$. Με μια απλή αντικατάσταση στην (1), αποδεικνύεται ότι τα σημεία αυτά την επαληθεύουν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και ως εκ τούτου, αποτελούν τα κοινά σημεία όλων των κύκλων.



γ) Η κοινή χορδή των κύκλων (1) είναι το ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα. Επομένως έχει εξίσωση $y = 0$. Τα κέντρα όλων των κύκλων είναι της μορφής $K(2, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα όλων των κύκλων, είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = 2$. Επομένως είναι κάθετη στην κοινή χορδή.

δ) Αφού το σημείο M επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ πρέπει υποχρεωτικά να είναι το $A(1,0)$ ή το $B(3,0)$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει: $\alpha \cdot \beta = 1 \cdot 0 = 3 \cdot 0 = 0$.

15791. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου A και την ευθεία $(\varepsilon) : x = 5$.

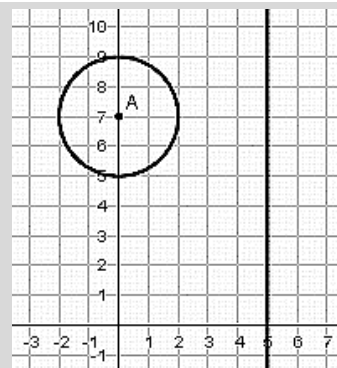
α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 .

β) Έστω ένα σημείο του επιπέδου $B(x_1, y_1)$.

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $B(x_1, y_1)$ και ακτίνα 2.

ii. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου AB σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου B .

γ) Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β) i. με ακτίνα 2, που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία (ε) .



Λύση

α) Ο κύκλος C_1 κέντρου $A(0,7)$ και ακτίνα $\rho = 2$, άρα έχει εξίσωση $x^2 + (y-7)^2 = 4$.

β) i. $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 4$.

ii. Είναι $(AB) = \sqrt{x_1^2 + (7 - y_1)^2}$.

γ) Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους. Οπότε έχουμε: $(AB) = 2 + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + (7 - y_1)^2} = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + (7 - y_1)^2 = 16$ (1).

Ένας κύκλος εφάπτεται σε ευθεία αν και μόνο αν το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του. Οπότε έχουμε: $d(B, \varepsilon) = \frac{|0 + x_1 - 5|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 2 \Leftrightarrow |x_1 - 5| = 2$ (2).

Για να βρούμε τους κύκλους που εφάπτονται στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) επιλύουμε το σύστημα

των εξισώσεων (1) και (2): $\begin{cases} x_1^2 + (7 - y_1)^2 = 16 \\ |x_1 - 5| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + (7 - y_1)^2 = 16 \\ x_1 - 5 = \pm 2 \end{cases}$. Άρα

$\begin{cases} x_1^2 + (7 - y_1)^2 = 16 \\ x_1 - 5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49 + (7 - y_1)^2 = 16 \\ x_1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7 - y_1)^2 = -33 \\ x_1 = 7 \end{cases}$ Αδύνατο ή

$\begin{cases} x_1^2 + (7 - y_1)^2 = 16 \\ x_1 - 5 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + (7 - y_1)^2 = 16 \\ x_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7 - y_1)^2 = 7 \\ x_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - y_1 = \pm\sqrt{7} \\ x_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 \pm \sqrt{7} = y_1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$.

Τελικά οι δύο κύκλοι που εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο C_1 και την ευθεία (ε) έχουν κέντρα τα σημεία $(3, 7 - \sqrt{7})$, $(3, 7 + \sqrt{7})$ και ακτίνα 2.

15826. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 2\lambda y + 2\lambda + 1 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου K και την ακτίνα ρ .

β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda = 0$;

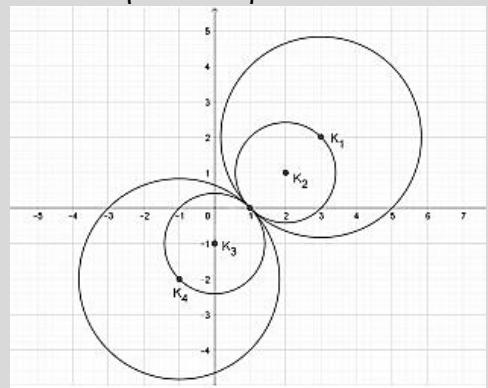
γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1, K_2, K_3, K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ .

Αξιοποιώντας το σχήμα,

i. να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii. να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

iii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y - 1 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).



Λύση

α) Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4(\lambda + 1)^2 + 4\lambda^2 - 4(2\lambda + 1) = 4\lambda^2 + 8\lambda + 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda - 4 = 8\lambda^2$.

Η (1) παριστάνει κύκλο όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 8\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$.

Το κέντρο είναι το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \equiv (\lambda + 1, \lambda)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{8\lambda^2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}|\lambda|}{2} = \sqrt{2}|\lambda|$.

β) Για $\lambda = 0$ η (1) γίνεται $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $y = 0$, που σημαίνει ότι παριστάνει το σημείο $M(1, 0)$.

γ) i. Η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα K_2, K_3 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1+1}{2-0} = 1$ και εξίσωση

$$\zeta: y+1=x-0 \Leftrightarrow y=x-1.$$

Θα αποδείξουμε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω στην ευθεία ζ . Πράγματι το τυχαίο κέντρο $K(\lambda+1, \lambda)$ ανήκει στην ευθεία ζ , αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $y = x - 1$.

ii. Οι κύκλοι του σχήματος διέρχονται από το σημείο $M(1,0)$. Θα αποδείξουμε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από το $M(1,0)$. Πράγματι οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ αφού $1^2 + 0^2 - 2(\lambda+1) - 2\lambda \cdot 0 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει.

iii. Θα πρέπει το κέντρο $K(\lambda+1, \lambda)$ να απέχει από την ευθεία ε απόσταση ίση με την ακτίνα ρ .

$$\text{Είναι } d(K, \varepsilon) = \frac{|\lambda+1+\lambda-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2|\lambda|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\lambda| = \rho.$$

16191. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(5,5)$.

α) Αν για το σημείο $M(x, \psi)$ ισχύει $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 32$, να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο M βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 6\psi - 6x + 10 = 0$ (1).

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το $K(3,3)$ και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$.

i. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε): $\lambda x + \psi = 2$ εφάπτεται του κύκλου (1).

ii. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την AB γωνία 45° ;

Λύση

α) i. Είναι $\overline{AM}^2 = (x-1, \psi-1)$, $\overline{BM}^2 = (x-5, \psi-5)$ και

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 32 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2 + (\psi-1)^2} \right)^2 + \left(\sqrt{(x-5)^2 + (\psi-5)^2} \right)^2 = 32 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + \psi^2 - 2\psi + 1 + x^2 - 10x + 25 + \psi^2 - 10\psi + 25 = 32 \Leftrightarrow 2x^2 + 2\psi^2 - 12x - 12\psi + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \psi^2 - 6x - 6\psi + 10 = 0.$$

ii. Είναι $x^2 + \psi^2 - 6x - 6\psi + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + \psi^2 - 6\psi + 9 = 9 + 9 - 10 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (\psi-3)^2 = 8$.

άρα η (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(3,3)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

β) i. Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία, πρέπει η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία να ισούται με την ακτίνα του κύκλου.

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|3\lambda + 3 - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |3\lambda + 1| = 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow (3\lambda + 1)^2 = 8(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 8\lambda^2 + 8 \Leftrightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -7.$$

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι $\lambda_{AB} = \frac{5-1}{5-1} = 1$. Ένα διάνυσμα παράλληλο στην AB είναι το

$\vec{\delta}_1 = (1,1)$ ενώ ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta}_2 = (1, -\lambda)$. Η γωνία των δύο ευθειών είναι η γωνία των δύο διανυσμάτων που είναι παράλληλα σε αυτές.

$$\cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{1 \cdot 1 + 1(-\lambda)}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1^2 + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$2(1-\lambda) = 2\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow 1-\lambda = \sqrt{1+\lambda^2} \xrightarrow{1-\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1} (1-\lambda)^2 = 1+\lambda^2 \Leftrightarrow 1-2\lambda+\lambda^2 = 1+\lambda^2 \Leftrightarrow -2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

18237.Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(1, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς $B\Gamma$.

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$.

γ) Να βρείτε σημείο K στην μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ που ισαπέχει από τα A, B .

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

α) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{2-2}{3+1} = 0$ και $\lambda_{B\Gamma} = \frac{4-2}{1-3} = -1$.

Επειδή $\lambda_{AB} \neq \lambda_{B\Gamma}$ οι ευθείες AB και $B\Gamma$ δεν είναι παράλληλες, οπότε τα σημεία A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά και σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Έστω M το μέσο του $B\Gamma$. Είναι $x_M = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = 2$, $y_M = \frac{y_\Gamma + y_B}{2} = 3$, άρα $M(2,3)$.

Αν ε η μεσοκάθετος του $B\Gamma$, τότε $\varepsilon \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1$ και η ε έχει εξίσωση:

$$y - 3 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

γ) Έστω $K(x, y)$ το σημείο της μεσοκάθετης που ισαπέχει από τα σημεία A, B . Τότε $y = x + 1$ και

$$(KA) = (KB) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 8x = 8 \Leftrightarrow x = 1 \text{ και } y = 1 + 1 = 2, \text{ άρα } K(1,2).$$

δ) Το σημείο K από τον τρόπο προσδιορισμού του ισαπέχει από τις κορυφές A, B, Γ του τριγώνου, άρα είναι το περίκεντρό του. Σε ότι αφορά στην ακτίνα ρ του περιγεγραμμένου κύκλου ισχύει.

$$\rho = (KA) = \sqrt{(1+1)^2 + (2-2)^2} = 2 \text{ και ο κύκλος έχει εξίσωση: } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

18247.Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$ όπου $\alpha, \beta > 0$.

α) Να βρείτε συναρτήσεως των α, β

i. τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

ii. την απόσταση (OM) .

β) Αν $(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $(OM) = \frac{(AB)}{2}$.

ii. να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου OAB .

Λύση

α) i. Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\alpha}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\beta}{2}$, άρα $M\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$.

ii. Είναι $(OM) = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$

β) i. Είναι $(AB) = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (0 - \beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, άρα $(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} = \frac{(AB)}{2}$.

ii. Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί είναι η εξής:

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

γ) Επειδή $(OM) = \frac{(AB)}{2} = (AM) = (MB)$ το M ισαπέχει από τα O, A, B οπότε είναι το κέντρο του

περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου OAB. Η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}.$$

18415. Δίνεται η εξίσωση $(x - 3\lambda)^2 + (y + 2\lambda)^2 = 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + 3y = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε .

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε .

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.

Λύση

α) Η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3\lambda, -2\lambda)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

$$\text{Είναι } x_K = 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{x_K}{3} \text{ και } y_K = -2\lambda = -2\frac{x_K}{3} \Leftrightarrow 3y_K + 2x_K = 0.$$

Οι συντεταγμένες του K επαληθεύουν την εξίσωση $3y + 2x = 0$, οπότε τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην ευθεία ε .

β) Αν $M(x, y)$ σημείο της ε_1 ή της ε_2 , τότε:

$$d(M, \varepsilon) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2x + 3y|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 1 \Leftrightarrow |2x + 3y| = \sqrt{13} \Leftrightarrow 2x + 3y = \pm\sqrt{13}, \text{ οπότε οι ευθείες } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ έχουν εξισώσεις}$$

$$2x + 3y = \sqrt{13}, \quad 2x + 3y = -\sqrt{13}.$$

γ) Αφού τα κέντρα K όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ανήκουν στην ε , δηλαδή στη μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, έχουμε ότι $d(K, \varepsilon_1) = d(K, \varepsilon_2) = 1 = \rho$, επομένως όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

δ) Ένα τετράγωνο του οποίου οι δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ θα έχει μήκος πλευράς ίσο με την απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, δηλαδή 2. Συνεπώς το εμβαδόν του κα είναι ίσο με 4.

18416. Δίνεται η εξίσωση $x(x - 4) + y(y - 2) = 2(x + y - 4)$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3, 2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

β) Δίνονται τα σημεία $A(4, 4)$ και $B(2, 0)$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB.

γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y = \lambda x + 4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20}$.

Λύση

α) Είναι $x(x-4) + y(y-2) = 2(x+y-4) \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y = 2x + 2y - 8 \Leftrightarrow$
 $x^2 - 6x + y^2 - 4y = -8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 8 = -8 + 9 + 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5.$

Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

β) i. Αρχικά θα δείξουμε ότι τα A, B είναι σημεία του κύκλου.

Το A βρίσκεται στον κύκλο όταν $(4-3)^2 + (4-2)^2 = 5 \Leftrightarrow 1+4=5$ ισχύει

Το B βρίσκεται στον κύκλο όταν $(2-3)^2 + (0-2)^2 = 5 \Leftrightarrow 1+4=5$ ισχύει.

Στη συνέχεια, για να είναι διάμετρος η AB , πρέπει το K να είναι μέσο του AB .

Είναι $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4+2}{2} = 3 = x_K$ και $\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+0}{2} = 2 = y_K$. Άρα τα A, B είναι αντιδιαμετρικά.

ii. Οι ευθείες που είναι παράλληλες στην AB έχουν εξίσωση της μορφής

$$\varepsilon: y = \lambda_{AB}x + \beta \Leftrightarrow y = \frac{0-4}{2-4}x + \beta \Leftrightarrow 2x - y + \beta = 0.$$

Η ε εφάπτεται του κύκλου όταν

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + \beta|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|4 + \beta|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |4 + \beta| = 5 \Leftrightarrow \beta + 4 = \pm 5 \Leftrightarrow$$

$$(\beta + 4 = 5 \Leftrightarrow \beta = 1) \text{ ή } (\beta + 4 = -5 \Leftrightarrow \beta = -9).$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες έχουν εξίσωση $y = 2x + 1$ ή $y = 2x - 9$.

γ) Παρατηρούμε ότι $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 2\rho$, άρα η $\Gamma\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου, οπότε διέρχεται από το κέντρο K και ισχύει: $2 = \lambda \cdot 3 + 4 \Leftrightarrow -2 = 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$.

18467. Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2(x+3): (1).$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2, -2)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

β) Να δείξετε ότι η αρχή O των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία A και B ώστε η αρχή των αξόνων να είναι το μέσο της χορδής AB .

δ) Αν η ευθεία (ε) του προηγούμενου ερωτήματος έχει εξίσωση $y = x$ τότε να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου KAB .

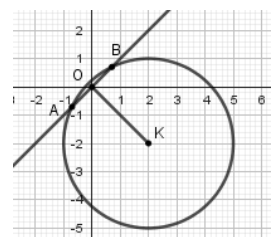
Λύση

α) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2(x+3) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + (y+2)^2 = 2x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x + (y+2)^2 = 5 \Leftrightarrow$
 $x^2 - 4x + 4 + (y+2)^2 = 5 + 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 9.$

Η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2, -2)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

β) Είναι $(KO) = \sqrt{(0-2)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} < 3$ άρα η αρχή O των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

γ) Επειδή το O είναι μέσο της χορδής AB , η OK είναι απόσταση της χορδής.



Είναι $\lambda_{OK} = \frac{-2}{2} = -1$ και $OK \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{OK} \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AB} = 1$, οπότε η ευθεία AB είναι η $y = x$.

δ) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο AOB έχουμε:

$$AO^2 = AK^2 - OK^2 = 3^2 - \left(\sqrt{2^2 + (-2)^2}\right)^2 = 9 - 8 = 1 \Leftrightarrow AO = 1 \Leftrightarrow AB = 2AO = 2.$$

$$(KAB) = \frac{1}{2}(AB)(KO) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

18521. Δίνονται τα σημεία A(1,2), B(2,4) και Γ(3,1).

α) Να αποδείξετε ότι η $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 90^\circ$.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c, ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ.

γ) Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

α) $\lambda_{AB} = \frac{4-2}{2-1} = 2$, $\lambda_{AG} = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}$. Είναι $\lambda_{AB} \lambda_{AG} = -1 \Leftrightarrow AB \perp AG \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 90^\circ$.

β) Επειδή $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 90^\circ$, ο ζητούμενος κύκλος έχει διάμετρο τη ΒΓ, οπότε το κέντρο του είναι το μέσο Μ της ΒΓ. Είναι $x_M = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = \frac{5}{2}$, $y_M = \frac{y_\Gamma + y_B}{2} = \frac{5}{2}$, άρα $M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Η ακτίνα ρ του κύκλου είναι $\rho = \frac{(B\Gamma)}{2} = \frac{\sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$, οπότε έχει εξίσωση

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

γ) Οι ευθείες ε που διέρχονται από την αρχή των αξόνων έχουν εξίσωση της μορφής $y = \lambda x$ ή $x = 0$.

Για να είναι ο $y'y$ δηλαδή η ευθεία $x = 0$ εφαπτομένη του C πρέπει $d(M, \varepsilon) = \rho$.

Είναι $d(M, \varepsilon) = \frac{5}{2} \neq \rho$, οπότε ο άξονας $y'y$ δεν εφάπτεται του κύκλου.

$$\text{Αν } \varepsilon: y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0, \text{ τότε } d(M, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{\left|\lambda \cdot \frac{5}{2} - 1 \cdot \frac{5}{2}\right|}{\sqrt{\lambda^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \cdot \frac{|\lambda - 1|}{\sqrt{\lambda^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow$$

$$25(\lambda - 1)^2 = 10(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 25\lambda^2 - 50\lambda + 25 = 10\lambda^2 + 10 \Leftrightarrow 15\lambda^2 - 50\lambda + 15 = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 3 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{3}. \text{ Άρα } \varepsilon: y = 3x \text{ ή } y = \frac{1}{3}x.$$

18567. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο A($2\sqrt{2}, 0$).

α) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου C.

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες.

β) Αν B, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο A, να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ABOΓ.

Λύση

α) i. Ο κύκλος C έχει κέντρο O(0,0) και ακτίνα $\rho = 2$.

Είναι $(OA) = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 0^2} = 2\sqrt{2} > 2 = \rho$, οπότε το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου.

ii. Οι ευθείες που διέρχονται από το Α και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ , έχουν εξίσωση:

$$\varepsilon: y = \lambda(x - 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \lambda x - y - 2\lambda\sqrt{2} = 0.$$

Η ε εφάπτεται του κύκλου όταν

$$d(O, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 - 2\lambda\sqrt{2}|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow 2\lambda\sqrt{2} = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

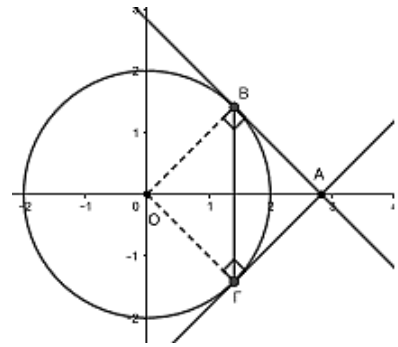
Οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι ευθείες

$$\varepsilon_1: x - y - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow y = x - 2\sqrt{2} \text{ και } \varepsilon_2: -x - y + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow y = -x + 2\sqrt{2}.$$

Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν αντίστοιχα συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Είναι $\lambda_1 \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

β) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με τον κύκλο C, τότε οι ακτίνες του κύκλου στα σημεία αυτά είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες. Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΟΓ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο. Επειδή $OA = OB = 2$ ως ακτίνες του κύκλου, άρα είναι ρόμβος. Επομένως το ΑΒΟΓ είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή 2.

Συνεπώς $(ΑΒΟΓ) = 2^2 = 4$.



18569. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 1$.

α) Αν Α και Α' είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox' αντίστοιχα, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Α' είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 150° .

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο Β, να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΒ έχει μήκος $\sqrt{3}$.

γ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από τα σημεία Α' και Β.

Λύση

α) i. Τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox' έχουν τεταγμένη μηδέν. Επομένως, για $y=0$ έχουμε:

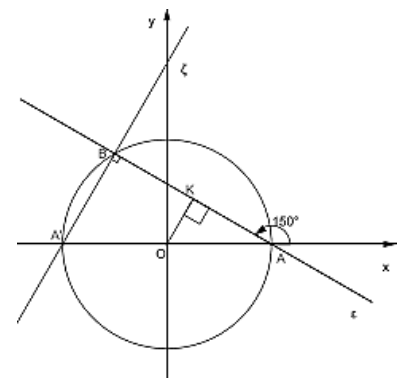
$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1, \text{ άρα } A'(-1,0) \text{ και } A(1,0).$$

ii. Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_\varepsilon = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ οπότε έχει εξίσωση:}$$

$$y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

β) i. Αν ΟΚ το απόστημα της χορδής ΑΒ, τότε



$$(OK) = d(O, \varepsilon) = \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0 + 0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OKA έχουμε:

$$(KA)^2 = (OA)^2 - (OK)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (KA) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Επειδή το K είναι μέσο της χορδής AB, ισχύει ότι $(AB) = 2(KA) = \sqrt{3}$.

γ) Η γωνία A'BA είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα $A'B \perp BA$ δηλαδή $\zeta \perp \varepsilon$, οπότε

$$\lambda_\varepsilon \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

Η ευθεία ζ έχει εξίσωση $y - 0 = \sqrt{3}(x + 1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

18570. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία

$$(\varepsilon): 3x - 4y = \mu, \mu \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία A, B

i. Να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του.

iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓAB να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB.

Λύση

$$\alpha) x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 4 + 16 + 5 \Leftrightarrow$$

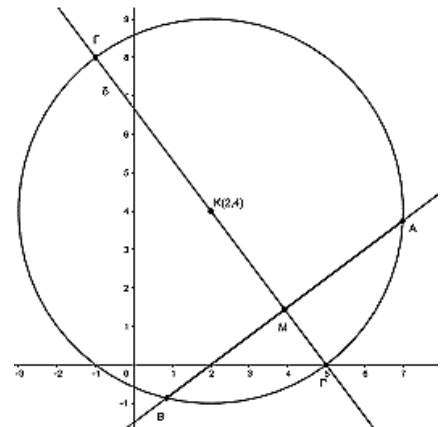
$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο K(2,4) και η ακτίνα του είναι $\rho = 5$.

β) i. Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του από την ευθεία ε είναι μικρότερη της ακτίνας του. Δηλαδή $d(K, \varepsilon) < \rho \Leftrightarrow$

$$\frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - \mu|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} < 5 \Leftrightarrow \frac{|-10 - \mu|}{5} < 5 \Leftrightarrow |\mu + 10| < 25 \Leftrightarrow$$

$$-25 < \mu + 10 < 25 \Leftrightarrow -35 < \mu < 15.$$



ii. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τότε οι συντεταγμένες του σημείου K θα επαληθεύουν την εξίσωση της. Δηλαδή $3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = \mu \Leftrightarrow \mu = -10$ δεκτή.

iii. Το ζητούμενο σημείο Γ θα είναι η κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΓAB με βάση τη χορδή AB. Άρα το Γ ανήκει στη μεσοκάθετη ευθεία (δ) της χορδής AB που είναι ο φορέας του αποστήματος της χορδής AB και είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο K του κύκλου. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας

AB είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε , με $\lambda_\varepsilon = \frac{3}{4}$.

Είναι $\delta \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\delta \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = -\frac{4}{3}$ και η ευθεία δ έχει εξίσωση:

$$y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} = -\frac{4}{3}(x - 5).$$

Τα σημεία τομής της ευθείας δ με τον κύκλο είναι τα ζητούμενα σημεία.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ y = -\frac{4}{3}(x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}(x-5)-4\right)^2 = 25 \quad (1) \\ y = -\frac{4}{3}(x-5) \quad (2) \end{cases}.$$

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(\frac{-4x+20-12}{3}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(\frac{-4x+8}{3}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(\frac{4}{3}(x-2)\right)^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + \frac{16}{9}(x-2)^2 = 25 \Leftrightarrow 9(x-2)^2 + 16(x-2)^2 = 225 \Leftrightarrow 25(x-2)^2 = 225 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x-2 = \pm 3 \Leftrightarrow (x-2=3 \Leftrightarrow x=5) \text{ ή } (x-2=-3 \Leftrightarrow x=-1)$$

$$\text{Αν } x = 5 \text{ τότε } (2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}(5-5) = 0 \text{ και αν } x = -1 \text{ τότε } y = -\frac{4}{3}(-1-5) = 8.$$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ, τα Γ(5,0) και Γ'(-1,8).

18745.Επιστήμονες προκειμένου να μελετήσουν υδρόβιο έντομο κατέγραψαν στιγμιότυπα από τους ομόκεντρους κύκλους με κέντρα τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και ακτίνες 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα, που σχηματίζονται

σε κάθε προσγείωση του στο νερό.

Η εικόνα από τις εναέριες λήψεις αποτυπώθηκαν σε σύστημα αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα.

Το έντομο κινούμενο ευθύγραμμο περνάει από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ για να καταγραφεί την στιγμή που καταλήγει στο σημείο Μ.

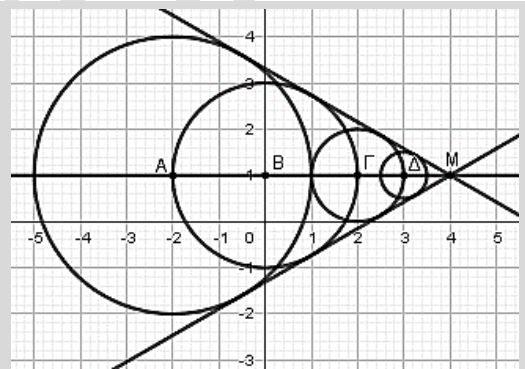
α) Να βρείτε την εξίσωση της πορείας του εντόμου.

β) i. Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon_1): y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3-4\sqrt{3}}{3}$ είναι κοινή εφαπτόμενη των τεσσάρων κύκλων.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτομένης.

γ) Με βάση το μοτίβο που ακολουθούν οι κινήσεις του εντόμου να βρείτε ότι η τελική θέση του εντόμου είναι το σημείο Μ(4,1).

$$\text{Δίνεται ότι } \varepsilon\phi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Λύση

α) Το έντομο κινείται πάνω στη διακεντρική ευθεία των 4 κύκλων, η οποία είναι οριζόντια και διέρχεται από το σημείο Β(0,1) άρα είναι η $y = 1$.

β) i. Έστω $C_1(A, r_1 = 3), C_2(B, r_2 = 2), C_3(\Gamma, r_3 = 1)$ και $C_4\left(\Delta, r_4 = \frac{1}{2}\right)$ οι τέσσερις κύκλοι.

Είναι :

$$\bullet \quad d(A, \varepsilon_1) = \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + \frac{3-4\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 + \frac{3-4\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{3}{9} + 1}} \Leftrightarrow d(A, \varepsilon_1) = \frac{\left| \frac{-2\sqrt{3} - 3 + 3 - 4\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \Leftrightarrow$$

$$d(A, \varepsilon_1) = \frac{\left| \frac{-6\sqrt{3}}{3} \right|}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2} = 3 = \rho_1.$$

$$\bullet \quad d(B, \varepsilon_1) = \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0 - 1 \cdot 1 + \frac{3-4\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -1 + \frac{3-4\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{3}{9} + 1}} \Leftrightarrow d(B, \varepsilon_1) = \frac{\left| \frac{-3 + 3 - 4\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \Leftrightarrow$$

$$d(B, \varepsilon_1) = \frac{\left| \frac{-4\sqrt{3}}{3} \right|}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{2} = 2 = \rho_2.$$

$$\bullet \quad d(\Gamma, \varepsilon_1) = \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2 - 1 \cdot 1 + \frac{3-4\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 + \frac{3-4\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{3}{9} + 1}} \Leftrightarrow d(\Gamma, \varepsilon_1) = \frac{\left| \frac{2\sqrt{3} - 3 + 3 - 4\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \Leftrightarrow$$

$$d(\Gamma, \varepsilon_1) = \frac{\left| \frac{-2\sqrt{3}}{3} \right|}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{2} = 1 = \rho_3.$$

$$\bullet \quad d(\Delta, \varepsilon_1) = \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 - 1 \cdot 1 + \frac{3-4\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| \frac{3\sqrt{3}}{3} - 1 + \frac{3-4\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{3}{9} + 1}} \Leftrightarrow d(\Delta, \varepsilon_1) = \frac{\left| \frac{3\sqrt{3} - 3 + 3 - 4\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \Leftrightarrow$$

$$d(\Delta, \varepsilon_1) = \frac{\left| \frac{-\sqrt{3}}{3} \right|}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} = \rho_4.$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3-4\sqrt{3}}{3}$ είναι κοινή εφαπτόμενη των τεσσάρων κύκλων.

ii. Η (ε_1) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ άρα και με την $y=1$ γωνία ω με $\varepsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$ οπότε $\omega = 30^\circ$

Η άλλη κοινή εφαπτομένη (ε_2) είναι συμμετρική της (ε_1) ως την ευθεία $y=1$

άρα σχηματίζει γωνία $\theta = 150^\circ$ με την ευθεία $y=1$ άρα και τον άξονα $x'x$.

Άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Έστω $(\varepsilon_2): y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \beta$.

Η (ε_2) διέρχεται από το σημείο $M(4,1)$ οπότε $1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \beta = \frac{3+4\sqrt{3}}{3}$.

Άρα $(\varepsilon_2): y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3+4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Οι εφαπτόμενες (ϵ_1) , (ϵ_2) και η ευθεία της διακέντρου διέρχονται από το σημείο M , άρα η τελική θέση του εντόμου είναι το $M(4,1)$.

18781. Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 = 1$.

α) Να δείξετε ότι:

i. Η εξίσωση του κύκλου C_1 γράφεται στη μορφή $(x-3)^2 + y^2 = 4$.

ii. Οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

β) Να βρείτε:

i. Το σημείο επαφής των δύο κύκλων C_1 και C_2 .

ii. Την εξίσωση της εσωτερικής κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων C_1 και C_2 .

γ) Αν τα σημεία M_1, M_2 διατρέχουν τους κύκλους C_1, C_2 αντίστοιχα, να βρείτε τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα στα σημεία αυτά.

Λύση

α) i. $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9 - 5 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4$.

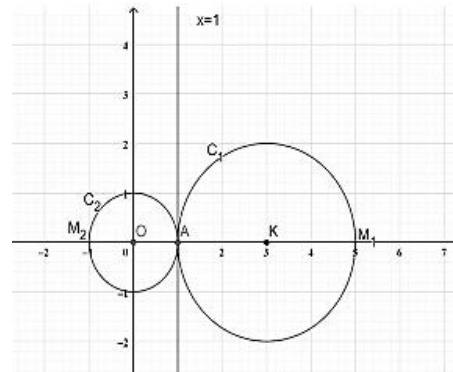
ii. Ο C_1 έχει κέντρο $K(3,0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$. Είναι $(OK) = 3 = \rho_1 + \rho_2$ οπότε οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

β) i. Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, προκύπτει:

$-6x + 5 = -1 \Leftrightarrow -6x = -6 \Leftrightarrow x = 1$ και $1^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$, επομένως οι κύκλοι εφάπτονται στο σημείο $A(1,0)$.

ii. Η διακεντρική ευθεία OK είναι ο άξονας $x'x$ και η εφαπτομένη των κύκλων στο A είναι κάθετη στη διακεντρική ευθεία, άρα έχει εξίσωση $x = 1$.

γ) Επειδή οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, η μέγιστη απόσταση των σημείων M_1, M_2 των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα είναι: $(M_1M_2)_{\max} = (M_2A) + (AM_1) = 2\rho_2 + 2\rho_1 = 2 + 4 = 6$.



18871. Δίνεται ο κύκλος C με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$ και το σημείο $A(3,1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου και να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου.

β) i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο (c) και διέρχονται από το σημείο A έχουν εξισώσεις $(\epsilon_1): 2x - y = 5$ και $(\epsilon_2): x + 2y = 5$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{B\hat{A}G}$, όπου B και Γ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2) με τον κύκλο.

Λύση

α) $(C): x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$

Είναι $(OA) = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} > \rho$ άρα το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου.

β) i. Έστω ότι οι εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από το A έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ , τότε η εξίσωσή τους είναι της μορφής: $\epsilon: y - 1 = \lambda(x - 3) \Leftrightarrow y - 1 = \lambda x - 3\lambda \Leftrightarrow -\lambda x + y + 3\lambda - 1 = 0$

$$\text{Η εφάπτεται του (C) αν και μόνο αν } d(0, \epsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|-\lambda \cdot 0 + 0 + 3\lambda - 1|}{\sqrt{(-\lambda)^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |3\lambda - 1| = \sqrt{5}\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$(3\lambda - 1)^2 = 5(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 5\lambda^2 + 5 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 6\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 25$ και ρίζες $\lambda = 2$ ή $\lambda = -\frac{1}{2}$, οπότε οι ζητούμενες

εφαπτομένες είναι οι (ϵ_1) : $-2x + y + 6 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 5$ και

$$(\epsilon_2): \frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 5.$$

ii. Από το σύστημα των (C), (ϵ_1) , έχουμε:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2x + 5)^2 = 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x^2 + 20x + 25 - 5 = 0 \\ y = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5x^2 + 20x + 20 = 0 \\ y = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0 \\ y = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 = 0 \\ y = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 + 5 = 1 \end{cases}, \text{ άρα } B(-2, 1).$$

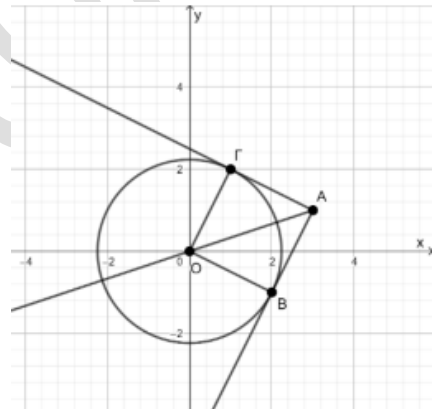
Από το σύστημα των (C), (ϵ_2) , έχουμε: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = -2y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5 - 2y)^2 + y^2 = 5 \\ x = -2y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 20y + 4y^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x = -2y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 5y^2 - 20y + 20 = 0 \\ x = -2y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 4 = 0 \\ x = -2y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 2)^2 = 0 \\ x = -2y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -4 + 5 = 1 \end{cases}$$

άρα $\Gamma(1, 2)$.

Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας των εφαπτομένων, οπότε η διχοτόμος γωνίας

ΒΑΓ είναι η ευθεία ΟΑ. Είναι $\lambda_{OA} = \frac{1}{3}$ και ΟΑ: $y = \frac{1}{3}x$.



20091. Τα σημεία $A(-7, -1)$ και $B(3, -5)$ είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου K. Το σημείο M είναι το μέσο της χορδής AB και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία K και M.

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου M.

ii. Την εξίσωση της ευθείας KM.

β) Αν από το κέντρο K του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): $x + y = -12$, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K.

ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C.

Λύση

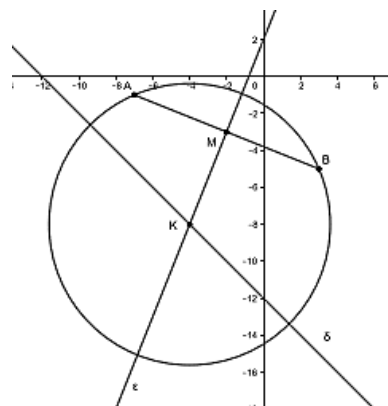
$$\alpha) \text{ i. } x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-7 + 3}{2} = -2, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 - 5}{2} = -3,$$

άρα $M(-2, -3)$.

$$\text{ii. Είναι } \lambda_{AB} = \frac{-5 + 1}{3 + 7} = -\frac{2}{5} \text{ και } KM \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{AB} \lambda_{KM} = -1 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2}{5} \lambda_{KM} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{KM} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Η KM έχει εξίσωση: } y + 3 = \frac{5}{2}(x + 2) \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x + 2.$$



β) i. Το κέντρο K του κύκλου ανήκει στην ευθεία δ και στην ευθεία KM. Άρα η τομή των δύο ευθειών, δηλαδή η λύση του συστήματος των δύο εξισώσεών τους, θα είναι οι συντεταγμένες του σημείου K.

$$\begin{cases} y = \frac{5}{2}x + 2 \\ x + y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2}x + 2 \\ x + \frac{5}{2}x + 2 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2}x + 2 \\ 2x + 5x + 4 = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2}x + 2 \\ 7x = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{2}(-4) + 2 = -8 \\ x = -4 \end{cases} \text{ άρα}$$

K(-4, -8).

ii. Αρκεί να βρούμε την ακτίνα του κύκλου που είναι το μήκος του τμήματος KA.

$$\rho = (KA) = \sqrt{(-4+7)^2 + (-8+1)^2} = \sqrt{58}. \text{ Η εξίσωση του κύκλου είναι } C: (x+4)^2 + (y+8)^2 = 58.$$

20229. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν.

δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για $\lambda = 0$. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα.

Λύση

α) Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda + 8)^2 + \lambda^2 - 4 \cdot 7 = \lambda^2 + 16\lambda + 64 + \lambda^2 - 28 = 2\lambda^2 + 16\lambda + 36 = 2(\lambda^2 + 8\lambda + 18) > 0$ γιατί το τριώνυμο $\lambda^2 + 8\lambda + 18$ έχει $\Delta = -8 < 0$, οπότε η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \equiv \left(-\frac{\lambda+8}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right) \text{ και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{2(\lambda^2 + 8\lambda + 18)}}{2}.$$

β) Είναι $x_K = \frac{\lambda+8}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2x_K - 8$ και $y_K = -\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda = -2y_K$, άρα $2x_K - 8 = -2y_K \Leftrightarrow x_K + y_K - 4 = 0$.

Οι συντεταγμένες του K επαληθεύουν την εξίσωση $x + y - 4 = 0$, οπότε τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην ευθεία $\varepsilon: x + y - 4 = 0$.

γ) Για $\lambda = -8$ είναι $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$ (1) και για $\lambda = 0$ είναι $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$ (2)

Αφαιρώντας τις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει: $-8y + 8x = 0 \Leftrightarrow y = x$, τότε η (2) γίνεται:

$$x^2 + x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Δύο από τους κύκλους διέρχονται από τα σημεία}$$

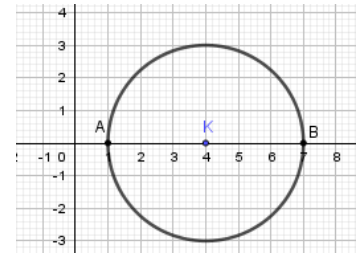
$$\Gamma\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ και } \Delta\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \text{ Για να διέρχονται όλοι οι κύκλοι από τα σημεία αυτά}$$

$$\text{πρέπει: } \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - (\lambda + 8)\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 7 = 0 \Leftrightarrow \dots \text{ισχύει και}$$

$$\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - (\lambda + 8)\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 7 = 0 \Leftrightarrow \dots \text{ισχύει}$$

δ) Για $\lambda = 0$ είναι $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 9$, ο κύκλος έχει κέντρο K(4,0) και ακτίνα $\rho = 3$.

Τα σημεία του κύκλου που απέχουν την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων βρίσκονται πάνω στην ΟΚ. Οπότε το σημείο του που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0, 0)$, είναι το $A(1, 0)$ και το σημείο του που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση είναι το $B(7, 0)$.



20650.α) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = x + 2$, $\varepsilon_2 : y = x - 2$ και τα σημεία $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.

i. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

ii. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M , του AB .

iii. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

β) Ο κύκλος (K, ρ) έχει την ιδιότητα να εφάπτεται των ευθειών ε_1 και ε_2 . Αν το κέντρο K του κύκλου (K, ρ) ανήκει στην ευθεία $(\eta) : x = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

i. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου K , συναρτήσει του λ .

ii. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ είναι ανεξάρτητη του λ και να γράψετε την εξίσωση που παριστάνει όλους τους κύκλους (K, ρ) , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) i. Είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

ii. $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 0$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 0$, άρα $M(0, 0)$.

iii. Η ζητούμενη μεσοπαράλληλη διέρχεται από το O και είναι παράλληλη στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, οπότε έχει εξίσωση $y = x$.

β) i. Επειδή το K ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 βρίσκεται στη μεσοπαράλληλό τους. Επειδή επιπλέον ανήκει στην ευθεία $(\eta) : x = \lambda$, έχει $y = x = \lambda$, οπότε $K(\lambda, \lambda)$.

ii. $\varepsilon_1 : y = x + 2 \Leftrightarrow -x + y - 2 = 0$.

Είναι $\rho = d(K, \varepsilon_1) = \frac{|-\lambda + \lambda + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ και είναι ανεξάρτητη του λ .

Οι ζητούμενοι κύκλοι έχουν εξίσωση: $(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = 2$.

20651. Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 4)$.

α) Να βρείτε όλα τα σημεία M στον άξονα $y'y$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την AB .

β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου C με διάμετρο AB .

γ) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C διέρχεται από τα σημεία M που προσδιορίσατε στο ερώτημα (α). Κατόπιν, να το επιβεβαιώσετε γεωμετρικά.

Λύση

α) i. Είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

ii. $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 0$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 0$, άρα $M(0, 0)$.

iii. Η ζητούμενη μεσοπαράλληλη διέρχεται από το Ο και είναι παράλληλη στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, οπότε έχει εξίσωση $y = x$.

β) i. Επειδή το Κ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 βρίσκεται στη μεσοπαράλληλό τους. Επειδή επιπλέον ανήκει στην ευθεία $(\eta): x = \lambda$, έχει $y = x = \lambda$, οπότε $K(\lambda, \lambda)$.

ii. $\varepsilon_1: y = x + 2 \Leftrightarrow -x + y - 2 = 0$.

Είναι $\rho = d(K, \varepsilon_1) = \frac{|-\lambda + \lambda + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ και είναι ανεξάρτητη του λ .

Οι ζητούμενοι κύκλοι έχουν εξίσωση: $(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = 2$.

20700. Δίνεται το τετράγωνο MM_1OM_2 με $M(4,4), M_1(4,0), M_2(0,4)$. Αν Ο η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση $C: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y = 8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C.

γ) Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C.

Λύση

α) Το κέντρο Κ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραγώνου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, το οποίο είναι και κοινό μέσο των διαγωνίων.

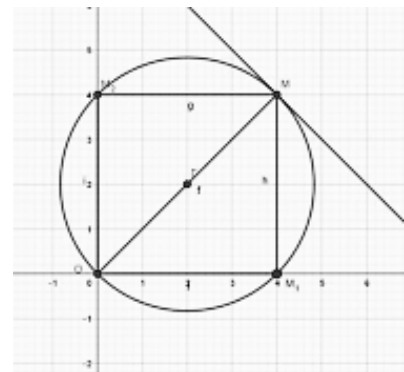
Η ΟΜ είναι διαγώνιος του τετραγώνου και το μέσο της Κ έχει συντεταγμένες

$$x_K = \frac{x_O + x_M}{2} = 2, y_K = \frac{y_O + y_M}{2} = 2, \text{ άρα } K(2,2). \text{ Η ακτίνα } \rho \text{ του}$$

κύκλου έχει μήκος $\rho = (OK) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση C: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

β) Η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου C, αν και μόνο αν $d(K, \varepsilon) = \rho$.

Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{|2 + 2 - 8|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} = \rho$, οπότε η ε εφάπτεται του C.



γ) Οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των ε, C είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεών τους.

$$\text{Είναι } \begin{cases} x + y = 8 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ (x - 2)^2 + (8 - x - 2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ (x - 2)^2 + (6 - x)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 8 - x \\ x^2 - 4x + 4 + 36 - 12x + x^2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ 2x^2 - 16x + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ x^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 8 - x \\ (x - 4)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - 4 = 4 \\ x = 4 \end{cases}, \text{ άρα το κοινό τους σημείο είναι το } M(4,4).$$

20863. Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

β) Αν K είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ζ), να βρείτε την εξίσωση

(c) όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο K και διέρχονται από τα σημεία A και B συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Αν η εξίσωση $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει όλους τους κύκλους (c) του ερωτήματος **β**), τότε:

i. Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB .

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $x + \lambda y - 1 = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους (c) στο σημείο $A(1,0)$.

Λύση

α) Αν $M(x_M, y_M)$ το μέσο του AB , τότε $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 2$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 0$, άρα $M(2,0)$.

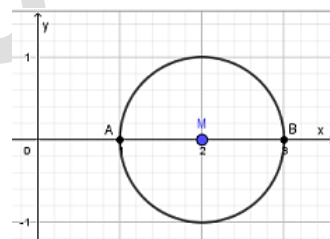
Επειδή τα σημεία A, B βρίσκονται στον άξονα $x'x$, η μεσοκάθετη του AB είναι η (ζ): $x = 2$.

β) Επειδή το K είναι σημείο της (ζ) οι συντεταγμένες του θα είναι της μορφής $(2, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Η ακτίνα του κύκλου (c) είναι $\rho = (KB) = (KA) = \sqrt{(2-1)^2 + (\lambda-0)^2} = \sqrt{1+\lambda^2}$, οπότε

η εξίσωσή τους είναι η $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = 1 + \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) i. Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το $M(2,0)$, άρα $\lambda = 0$ και η εξίσωσή του είναι $(x-2)^2 + y^2 = 1$.



ii. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $d(K, \varepsilon) = \rho$.

$$\text{Είναι } d(K, \varepsilon) = \frac{|1 \cdot 2 + \lambda \cdot \lambda - 1|}{\sqrt{1^2 + \lambda^2}} = \frac{1 + \lambda^2}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{(\sqrt{1 + \lambda^2})^2}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \sqrt{1 + \lambda^2} = \rho.$$

21154. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\alpha x - 4\alpha y = 0$ (1) όπου α είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο K και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του α .

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος **α**).

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Είναι $x^2 + y^2 - 4\alpha x - 4\alpha y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\alpha x + 4\alpha^2 + y^2 - 4\alpha y + 4\alpha^2 = 8\alpha^2 \Leftrightarrow (x-2\alpha)^2 + (y-2\alpha)^2 = 8\alpha^2$.

Η (1) είναι εξίσωση κύκλου όταν $8\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

β) Ο κύκλος έχει κέντρο $K(2\alpha, 2\alpha)$ και ακτίνα $R = \sqrt{8\alpha^2} = 2|\alpha|\sqrt{2}$.

γ) Είναι $x_K = 2\alpha = y_K$, $\alpha \neq 0$. Επομένως, τα κέντρα των κύκλων κινούνται πάνω στην ευθεία $y = x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$, αφού είναι $x \neq 0$ και $y \neq 0$.

δ) Για να εφάπτεται κάποιος από τους κύκλους που ορίζονται από την εξίσωση (1) στον άξονα $x'x$, θα πρέπει να ισχύει: $|y_K| = R \Leftrightarrow |2\alpha| = 2|\alpha|\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 = \sqrt{2}$ άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται του άξονα $x'x$.

21159. Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ με $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την AB , για κάθε τιμή των α και β είναι $x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την AB , για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή O των αξόνων και ένα σημείο P του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την AB για τις διάφορες τιμές των α και β .

Λύση

α) Οι κύκλοι με διάμετρο την AB έχουν κέντρο το μέσο K του τμήματος AB .

$$\text{Είναι } x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\alpha}{2}, y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\beta}{2}, \text{ άρα } K\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right).$$

Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = \frac{(AB)}{2} = \frac{\sqrt{(0-\alpha)^2 + (\beta-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$, οπότε η εξίσωση του είναι:

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x \cdot \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + y^2 - 2y \cdot \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \alpha x + y^2 - \beta y + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} \stackrel{\beta=10-\alpha}{\Leftrightarrow} x^2 - \alpha x + y^2 - (10 - \alpha)y = 0.$$

β) Για $\alpha = 1$ έχουμε τον κύκλο $C_1: x^2 + y^2 - x - 9y = 0$ (1).

Για $\alpha = 9$ έχουμε τον κύκλο $C_2: x^2 + y^2 - 9x - y = 0$ (2).

Θα βρούμε τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω κύκλων, αν υπάρχουν.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις των παραπάνω κύκλων έχουμε: $8x - 8y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

τότε από την εξίσωση (2) έχουμε: $x^2 + x^2 - 9x - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 5$

Για $x = 0$ έχουμε $y = 0$ και για $x = 5$ έχουμε $y = 5$, άρα οι δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία $O(0,0)$ και $P(5,5)$.

Όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το σημείο $P(5,5)$ αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση των κύκλων $x^2 - \alpha x + y^2 - (10 - \alpha)y = 0$.

Πράγματι αντικαθιστώντας τις τιμές $x = 5$ και $y = 5$ έχουμε $5^2 - \alpha \cdot 5 + 5^2 - (10 - \alpha) \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow$

$25 - 5\alpha + 25 - 50 + 10\alpha = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει και αντικαθιστώντας τις τιμές $x = 0$ και $y = 0$ έχουμε

$0^2 - \alpha \cdot 0 + 0^2 - (10 - \alpha) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει.

$$\gamma) \text{ Είναι } \begin{cases} x_M = \frac{\alpha}{2} \\ y_M = \frac{\beta}{2} \\ \alpha + \beta = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_M = \alpha \\ 2y_M = \beta \\ \alpha + \beta = 10 \end{cases} \Rightarrow 2x_M + 2y_M = 10 \Leftrightarrow x_M + y_M = 5.$$

Επειδή οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση $x + y = 5$, το M βρίσκεται επι της ευθείας αυτής.

Είναι $\beta > 0 \Leftrightarrow 2y > 0 \Leftrightarrow y > 0$ και $\begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta = 10 - \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \alpha < 10 \Leftrightarrow 0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5$.

Η ευθεία $x + y = 5$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(5,0)$ και $B(0,5)$.

Ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την AB είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB , που ορίζεται από την ευθεία $x + y = 5$ με $x > 0$ και $y > 0$ εκτός από τα άκρα του $A(5,0)$ και $B(0,5)$.

21276. Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή γ_1 , κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: $A(\lambda-1, 2\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- τη γραμμή γ_2 , που περνάει από το σταθμό $\Sigma(-4, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-1, 3)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2 .

β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο $K(1, 1)$ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2 . Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές.

γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο K και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1 .

Λύση

α) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $x_A = \lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = x_A + 1$ και $y_A = 2\lambda - 1 = 2(x_A + 1) + 1 \Leftrightarrow y_A = 2x_A + 3$.

Επειδή οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την εξίσωση $y = 2x + 3$, η γραμμή γ_1 είναι ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 3$.

Είναι $\lambda_{\gamma_2} = \lambda_{\vec{u}} = \frac{3}{-1} = -3$, άρα $\gamma_2: y - 2 = -3(x + 4) \Leftrightarrow y = -3x - 10 \Leftrightarrow 3x + y + 10 = 0$.

β) $d(K, \gamma_1) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ και $d(K, \gamma_2) = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{5}$.

Επειδή $\frac{4\sqrt{5}}{5} < \frac{7\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow d(K, \gamma_1) < d(K, \gamma_2)$ προφανώς συμφέρει η σύνδεση του σταδίου με τη γραμμή γ_1 .

γ) Το κέντρο του ζητούμενου κύκλου που ορίζει το κυκλικό πάρκο γύρω από το στάδιο, είναι το σημείο $K(1, 1)$. Εφόσον ο κύκλος αυτός εφάπτεται στη γραμμή γ_1 , η ακτίνα του λόγω του ερωτήματος (β), είναι

$\rho = d(K, \gamma_1) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, οπότε $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{16}{5}$.

21349. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο O θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ϵ) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$ (1) και $4x + 3y - 10 = 0$ (2) αντίστοιχα.

α) i. Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα R του κύκλου (C) .

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ϵ) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ϵ) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία.

iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία A και B στα οποία η ευθεία (ϵ) τέμνει τον κύκλο (C) .

β) Αν είναι $A(1, 2)$ και $B(4, -2)$, τότε:

i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.

ii. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο AB διέρχεται από το σημείο O .

Λύση

α) i. Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 81 + 9 - 40 = 50 > 0$, οπότε ο κύκλος

(C) έχει κέντρο $K\left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ ή $\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

ii. Η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία (ε) είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{\left| 4 \cdot \frac{9}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} - 10 \right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = \frac{5}{2} < \frac{5\sqrt{2}}{2} = \rho$.

Άρα, η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία Α και Β.

iii.
$$\begin{cases} 4x + 3y - 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{10-4x}{3} \quad (3) \\ x^2 + \left(\frac{10-4x}{3} \right)^2 - 9x - 3 \frac{10-4x}{3} + 10 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{100 - 80x + 16x^2}{9} - 9x - 10 + 4x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{100 - 80x + 16x^2}{9} - 5x = 0 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 + 100 - 80x + 16x^2 - 45x = 0 \Leftrightarrow 25x^2 - 125x + 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 4.$$

Για $x = 1$ είναι $y = 2$. Για $x = 4$ είναι $y = -2$.

Άρα, τα σημεία τομής της ευθείας (ε) και του κύκλου (C) είναι $A(1, 2)$ και $B(4, -2)$.

β) i. Είναι: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (1, 2) \cdot (4, -2) = 4 - 4 = 0$.

ii. Επειδή $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ η γωνία AOB είναι ορθή. Επομένως, ο κύκλος με διάμετρο AB είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του ορθογωνίου τριγώνου OAB . Συνεπώς, διέρχεται από το σημείο O .

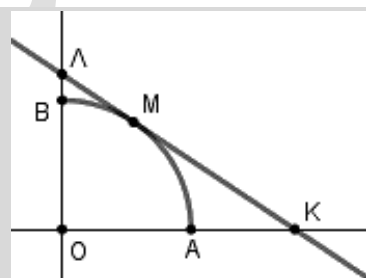
21683. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ και το τυχαίο σημείο του $M(x_1, y_1)$, $0 < x_1 < 2$ ανάμεσα στα A, B .

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο M και τις συντεταγμένες των σημείων τομής της K, Λ με τους άξονες.

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος d του τμήματος $K\Lambda$ είναι $d = \frac{8}{x_1 y_1}$.

γ) Να βρείτε το μήκος d_0 του τμήματος $K\Lambda$ όταν $x_1 = \sqrt{2}$.

δ) Να αποδείξετε ότι, όταν το M κινείται στο τεταρτοκύκλιο, τότε: $d \geq d_0$.



Λύση

α) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι (ε): $x x_1 + y y_1 = 4$ και για $x = 0$ είναι $y = \frac{4}{y_1}$ ($y_1 \neq 0$) ενώ

για $y = 0$ είναι $x = \frac{4}{x_1}$. Άρα η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $\Lambda\left(0, \frac{4}{y_1}\right)$ και τον άξονα $x'x$ στο $K\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$.

$$\beta) d = (K\Lambda) = \sqrt{\frac{16}{x_1^2} + \frac{16}{y_1^2}} = \sqrt{\frac{16x_1^2 + 16y_1^2}{x_1^2 y_1^2}} \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{16(x_1^2 + y_1^2)}{(x_1 y_1)^2}} = \frac{4\sqrt{4} \cdot \frac{x_1 y_1 > 0}{|x_1 y_1|}}{|x_1 y_1|} = \frac{8}{x_1 y_1} \text{ γιατί } x_1^2 + y_1^2 = 4.$$

$$\gamma) \text{ Όταν } x_1 = \sqrt{2} \text{ τότε } x_1^2 + y_1^2 = 4 \Leftrightarrow y_1^2 = 2 \Leftrightarrow y_1 = \sqrt{2} \text{ άρα } d_0 = (K\Lambda) = \frac{8}{\sqrt{2}^2} = 4.$$

$$\delta) \text{ Αρκεί να δείξουμε ότι } d \geq d_0 \Leftrightarrow \frac{8}{x_1 y_1} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{4}{x_1 y_1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1 y_1} \geq 2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 \geq 2x_1 y_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 y_1 + y_1^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 \geq 0 \text{ το οποίο ισχύει.}$$

21696. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, (1) και η ευθεία $\varepsilon: x - 2y + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ.

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία ε έχει κοινά σημεία με τον κύκλο C.

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ε.

δ) Να αποδείξετε ότι $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\rho$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό;

Λύση

α) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(1, -2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

β) 1^{ος} τρόπος: Θα λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2(x - 2y) = 0 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 6 = 0 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = -6 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$ είναι αδύνατο αφού $x^2 + y^2 \geq 0$ άρα δεν

έχουν κοινά σημεία.

2^{ος} τρόπος: Υπολογίζουμε την απόσταση της (ε) από το κέντρο του κύκλου και είναι

$d(K, \varepsilon) = \frac{|1 + 4 + 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} > \sqrt{5} = \rho$ (πράγματι $\frac{8\sqrt{5}}{5} > \sqrt{5} \Leftrightarrow 8\sqrt{5} > 5\sqrt{5}$ ισχύει) άρα η (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

γ) Είναι $(\varepsilon): x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ άρα $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{2}$ επομένως $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = -2$.

Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν εξίσωση της μορφής $y = -2x + \beta \Leftrightarrow 2x + y - \beta = 0$ με $\beta \in \mathbb{R}$ και απέχουν από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα (αφού είναι εφαπτομένες).

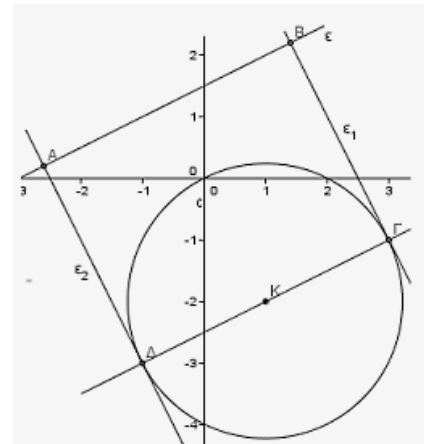
Άρα $d(K, \varepsilon_1) = \frac{|2 - 2 - \beta|}{\sqrt{4 + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{5} = \frac{|\beta|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |\beta| = 5 \Leftrightarrow \beta = \pm 5$.

Άρα είναι $\varepsilon_1: 2x + y - 5 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + y + 5 = 0$.

δ) Στην ε_1 για $x = 0$ είναι $y = 5$ άρα ένα σημείο της είναι το $A(0, 5)$. Αφού $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ τότε

$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_2) = \frac{|2 \cdot 0 + 5 + 5|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = 2\rho$.

Επειδή η (ε) δεν τέμνει τον κύκλο και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες στην (ε) και εφάπτονται στο κύκλο έστω στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τότε η ΓΔ είναι παράλληλη στην (ε). Επίσης ΚΓ θα είναι παράλληλη στην (ε) αφού ΚΓ ακτίνα άρα κάθετη στην ε_1 και ομοίως ΚΔ παράλληλη στην (ε). Επειδή από το Κ διέρχεται μοναδική παράλληλη προς την (ε) τότε η ΓΔ θα είναι διάμετρος άρα θα ισούται με 2ρ .



22061. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με μήκος πλευράς α ($\alpha > 0$) και κορυφές $A(0, \alpha)$, $B(0, 0)$, $\Gamma(\alpha, 0)$ και $\Delta(\alpha, \alpha)$.

Μ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ και το τμήμα ΒΝ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΜ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

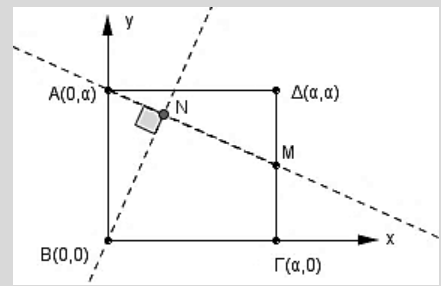
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών:

i. ΑΜ

ii. ΒΝ

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ν.

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο Ν ανήκει σε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα ίση με α . Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου αυτού.



Λύση

α) i) Αφού Μ μέσο ΔΓ τότε $M\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$. Άρα $\lambda_{AM} = \frac{\frac{\alpha}{2} - \alpha}{\alpha - 0} = \frac{-\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = -\frac{1}{2}$ και η ΑΜ έχει εξίσωση

$$y - \alpha = -\frac{1}{2}(x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \alpha$$

ii) Επειδή $BN \perp AM$ τότε $\lambda_{BN} \cdot \lambda_{AM} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{BN} = 2$ άρα η ΒΝ έχει εξίσωση $y - 0 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x$.

β) Το σημείο Ν είναι το σημείο τομής των ΒΝ και ΑΝ άρα λύνουμε το σύστημα:
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \alpha \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{1}{2}x + \alpha \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -x + 2\alpha \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 2\alpha \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\alpha}{5} \\ y = \frac{4\alpha}{5} \end{cases} \text{ άρα } N\left(\frac{2\alpha}{5}, \frac{4\alpha}{5}\right).$$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $(N\Gamma) = \alpha$.

$$\text{Είναι } (N\Gamma) = \sqrt{\left(\alpha - \frac{2\alpha}{5}\right)^2 + \left(\frac{4\alpha}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3\alpha}{5}\right)^2 + \frac{16\alpha^2}{25}} \Leftrightarrow (N\Gamma) = \sqrt{\frac{9\alpha^2}{25} + \frac{16\alpha^2}{25}} = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha| = \alpha.$$

Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$.

22062. Δίνεται η οικογένεια κύκλων

$$C_\lambda: (x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2, \text{ με } \lambda \neq 0.$$

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα κάθε κύκλου

C_λ , $\lambda \neq 0$.

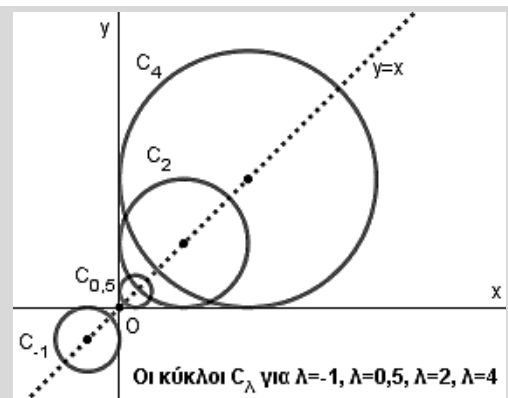
β) Να αποδείξετε ότι το κέντρο κάθε κύκλου C_λ βρίσκεται στην ευθεία $y = x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ , $\lambda \neq 0$.

Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = 0$.

δ) Έστω $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = \alpha$ εφάπτεται σε ένα, και μόνο ένα, από τους κύκλους C_λ . Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = \alpha$.

ε) Έστω $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\alpha x + \beta y = 1$ εφάπτεται σε δύο, και μόνο δύο, από τους κύκλους C_λ .



Οι κύκλοι C_λ για $\lambda = -1, \lambda = 0,5, \lambda = 2, \lambda = 4$

Λύση

α) Κάθε κύκλος C_λ έχει κέντρο $K(\lambda, \lambda)$ και ακτίνα $\rho = |\lambda|$ με $\lambda \neq 0$.

β) Επειδή το σημείο K επαληθεύει την εξίσωση $y = x$ (Πράγματι $\lambda = \lambda$) τότε ανήκει στην ευθεία.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $d(y'y, K) = \rho$ πράγματι είναι $d(y'y, K) = \frac{|\lambda + 0 \cdot \lambda + 0|}{\sqrt{1+0}} = |\lambda|$.

Ομοίως για την $y = 0$ είναι $d(x'x, K) = \frac{|0 \cdot \lambda + \lambda + 0|}{\sqrt{0+1}} = |\lambda| = \rho$.

δ) Η $(\eta): x = \alpha$ εφάπτεται σε κύκλο C_λ αν και μόνον αν $d(\eta, K) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda + 0 \cdot \lambda - \alpha|}{\sqrt{1+0}} = |\lambda| \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |\lambda - \alpha| = |\lambda| \Leftrightarrow (\lambda - \alpha = \lambda \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ αδύνατο}) \text{ ή } (\lambda - \alpha = -\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{\alpha}{2})$ Άρα εφάπτεται σε μοναδικό
 κύκλο τον $C: \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}$.

Ομοίως η $(\zeta): y = \alpha$ εφάπτεται σε κύκλο C_λ αν και μόνον αν $d(\zeta, K) = \rho \Leftrightarrow \frac{|0 \cdot \lambda + \lambda - \alpha|}{\sqrt{0+1}} = |\lambda| \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |\lambda - \alpha| = |\lambda| \Leftrightarrow (\lambda - \alpha = \lambda \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ αδύνατο}) \text{ ή } (\lambda - \alpha = -\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{\alpha}{2})$ Άρα εφάπτεται σε μοναδικό
 κύκλο τον $C: \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}$.

ε) Η $(\epsilon): \alpha x + \beta y - 1 = 0$ εφάπτεται σε κύκλο C_λ αν και μόνον αν $d(\epsilon, K) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\alpha\lambda + \beta\lambda - 1|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = |\lambda| \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |(\alpha + \beta)\lambda - 1| = |\lambda|\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Leftrightarrow |(\alpha + \beta)\lambda - 1| = |\lambda\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}| \Leftrightarrow$
 $\left((\alpha + \beta)\lambda - 1 = \lambda\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Leftrightarrow (\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \text{ ή }$
 $\Leftrightarrow \left((\alpha + \beta)\lambda - 1 = -\lambda\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})\lambda = 1 \Leftrightarrow \right.$
 $\left. \lambda = \frac{1}{\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)$ αφού $\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Leftrightarrow$
 $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta = 0$ αδύνατο αφού $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ και ομοίως
 $\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta = 0$ αδύνατο αφού $\alpha \neq 0$
 και $\beta \neq 0$.

22066. Θεωρούμε το σημείο $A = (\cos\theta, \sin\theta)$ και το σημείο

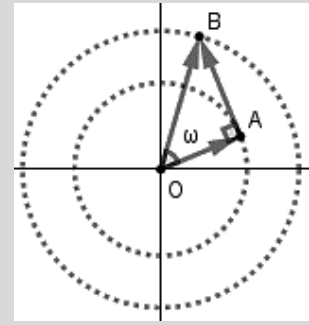
$$B = (\cos\theta - \sin\theta, \sin\theta + \cos\theta), \text{ όπου } \theta \in [0, 2\pi).$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ανήκουν σε δύο κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$.

γ) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ω μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.



Λύση

α) Για το σημείο A είναι $x = \cos\theta$ και $y = \sin\theta$ άρα $x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ οπότε το A ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ που έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα ίση με 1.

Για το σημείο B είναι $x = \cos\theta - \sin\theta$ και $y = \sin\theta + \cos\theta$ άρα

$$x^2 + y^2 = (\cos\theta - \sin\theta)^2 + (\sin\theta + \cos\theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2 \text{ οπότε το B ανήκει στον κύκλο } x^2 + y^2 = 2 \text{ που έχει κέντρο το } O(0,0) \text{ και ακτίνα ίση με } \sqrt{2}.$$

β) $\overrightarrow{OA} = (\cos\theta, \sin\theta)$ και $\overrightarrow{AB} = (\cos\theta - \sin\theta - \cos\theta, \sin\theta + \cos\theta - \sin\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

Είναι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$ άρα $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$.

γ) 1ος τρόπος: Αφού $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$ τότε το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

Επειδή $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$ άρα το OAB είναι και ισοσκελές άρα οι προσκείμενες στην βάση γωνίες είναι ίσες επομένως η γωνία ω είναι 45 μοίρες.

2ος τρόπος: Είναι $\overrightarrow{OB} = (\cos\theta - \sin\theta, \sin\theta + \cos\theta)$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \cos\omega &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{\cos\theta(\cos\theta - \sin\theta) + \sin\theta(\sin\theta + \cos\theta)}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \cdot \sqrt{(\cos\theta - \sin\theta)^2 + (\sin\theta + \cos\theta)^2}} = \\ &= \frac{\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα αφού η } \omega \text{ είναι οξεία γωνία είναι } 45 \text{ μοίρες.} \end{aligned}$$

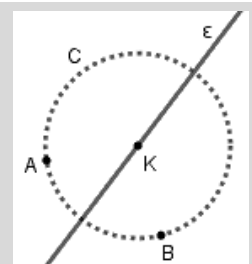
22069. Τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(6, 1)$ βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο C από το κέντρο K του οποίου διέρχεται η ευθεία $\epsilon: y = 2x - 7$.

Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του κέντρου K του κύκλου C.

β) την ακτίνα R του κύκλου C.

γ) την εξίσωση του κύκλου C.



Λύση

α) Αν M είναι το μέσο της χορδής AB του κύκλου τότε το KM είναι απόστημα άρα αρκεί να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας ϵ με την μεσοκάθετη δ του AB. Είναι $M\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$ και $\lambda_{AB} = \frac{1-2}{6-3} = -\frac{1}{3}$ άρα

αφού $AB \perp \delta$ τότε $\lambda_{\delta} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\delta} = 3$.

Άρα η μεσοκάθετη δ έχει εξίσωση

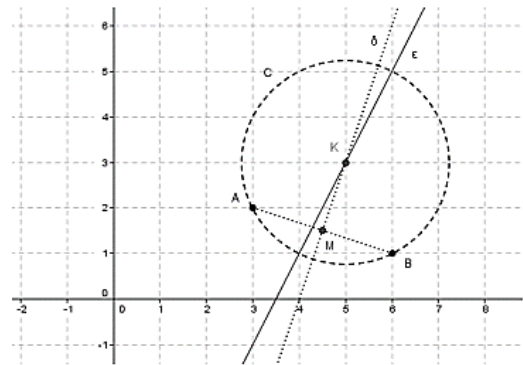
$$y - \frac{3}{2} = 3 \left(x - \frac{9}{2} \right) \Leftrightarrow y = 3x - \frac{27}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 3x - \frac{24}{2} \Leftrightarrow y = 3x - 12.$$

Έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = 3x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 12 = 2x - 7 \\ y = 3x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \text{ άρα το κέντρο}$$

του κύκλου είναι $K(5,3)$.



$$\beta) R = (AK) = \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

$$\gamma) C: (x-5)^2 + (y-3)^2 = 5.$$

22214. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-1,0)$, $B(1,0)$ για τα οποία ισχύει $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 9|\overline{AB}|$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 8$.

β) Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2 = 32$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

ii. Αν το σημείο M κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overline{M\Gamma} \cdot \overline{M\Delta}$.

Λύση

α) Είναι $\overline{AM} = (x+1, y)$, $\overline{BM} = (x-1, y)$ και $\overline{AB} = (1+1, 0) = (2, 0)$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 9|\overline{AB}| \Leftrightarrow |\overline{AM}|^2 + |\overline{BM}|^2 = 9|\overline{AB}| \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \right)^2 + \left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right)^2 = 9\sqrt{2^2 + 0^2} \Leftrightarrow$$

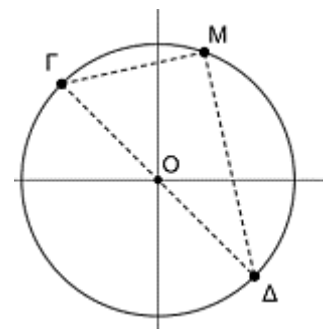
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 = 18 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8.$$

β) i. Για τα σημεία Γ και Δ του κύκλου ισχύει $\Gamma\Delta^2 = 32 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Ο κύκλος έχει ακτίνα $\rho = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, οπότε $\Gamma\Delta = 2\rho$, άρα τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά και επομένως η διάμετρος $\Gamma\Delta$ θα διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου.

ii. Αφού η $\Gamma\Delta$ είναι διάμετρος και το σημείο M είναι σημείο του κύκλου, τότε

$\Gamma M\Delta = 90^\circ$ γιατί είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Τότε όμως $\overline{M\Gamma} \perp \overline{M\Delta} \Leftrightarrow \overline{M\Gamma} \cdot \overline{M\Delta} = 0$.



22223. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overline{AB} = (\lambda, \lambda+1)$, $\overline{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda-1)$ και το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overline{AM} = (2\lambda, \lambda)$.

β) Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $BA\Gamma = 90^\circ$.

i. Να υπολογίσετε το λ .

ii. Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ και $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

$$\alpha) \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}) = \frac{1}{2}((\lambda, \lambda + 1) + (3\lambda, \lambda - 1)) = \frac{1}{2}(4\lambda, 2\lambda) = (2\lambda, \lambda)$$

$$\beta) \text{ i. } \angle BAG = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot 3\lambda + (\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 + \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}.$$

ii. Ο ζητούμενος κύκλος διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου Α, Β, Γ. Επειδή όμως η εγγεγραμμένη γωνία $\angle BAG = 90^\circ$ η απέναντί πλευρά ΒΓ θα είναι διάμετρος του κύκλου. Το κέντρο του θα βρίσκεται στο μέσο Μ(χ, γ) της διαμέτρου ΒΓ.

$$\text{Για } \lambda = \frac{1}{2} \text{ και } A\left(2, \frac{3}{2}\right) \text{ είναι } \overrightarrow{AM} = \left(2 \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x_M - 2, y_M - \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_M - 2 = 1 \\ y_M - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3 \\ y_M = 2 \end{cases}. \text{ Επομένως το κέντρο Μ είναι το } (3, 2).$$

$$\text{Είναι } \rho = (AM) = \sqrt{(3-2)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ είναι: } (x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{5}{4}.$$

22239. Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Οxy η εξίσωση $3x + 4y = 25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα 2.

- α) i.** Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού;
ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό.
iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή;
β) Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού;

Λύση

$$\alpha) \text{ i. } x^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

ii. Για να διέρχεται ο αγωγός από το κέντρο Ο θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση $3x + 4y = 25$, δηλαδή $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \neq 25$. Επομένως, ο αγωγός δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού.

iii. Για να έχουμε την ελάχιστη δυνατή απόσταση θα πρέπει να φέρουμε την κάθετη ΟΑ από το κέντρο Ο προς την ευθεία του αγωγού. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας του αγωγού είναι $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$.

$$\text{Είναι } \lambda_1 \lambda_{OA} = -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \lambda_{OA} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OA} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Η εξίσωση της ΑΟ θα είναι: } y - 0 = \frac{4}{3}(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x.$$

Το σημείο Α είναι το σημείο τομής της ΑΟ και της ευθείας του αγωγού. Για να βρεθεί λύνουμε το

$$\text{σύστημά τους. } \begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4 \cdot \frac{4}{3}x = 25 \\ (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 16x = 75 \\ (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x = 75 \\ (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4 \end{cases}.$$

Επομένως το σημείο Α είναι το (3,4).

β) Για να εφάπτεται ο δρόμος του κυκλικού σιντριβανιού πρέπει η απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία του δρόμου να ισούται με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή $d(O, \varepsilon) = \rho$.

$$d(O, \varepsilon) = 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 + \lambda - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1^2}} = 2 \Leftrightarrow |\lambda - 2| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = (2\sqrt{\lambda^2 + 1})^2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 4\lambda^2 + 4 \Leftrightarrow 3\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(3\lambda + 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ απορρίπτεται ή } \lambda = -\frac{4}{3}.$$

22264. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: x + y + 2 = 0$.

γ) Για $\lambda = 1$, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Λύση

α) Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + \lambda^2 - 4(\lambda - 1) = 2\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$.

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ έχει $\Delta = -4 < 0$ οπότε $\lambda^2 - 2\lambda + 2 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Το κέντρο Κ έχει συντεταγμένες $\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}$.

Για να εφάπτεται ο κύκλος που ορίζεται από την (1), της ευθείας $\varepsilon: x + y + 2 = 0$, πρέπει $d(K, \varepsilon) = \rho$ (2).

Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{\left|-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + 2\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-\lambda + 2|}{\sqrt{2}}$, οπότε η (2) γίνεται:

$$\frac{|-\lambda + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \Leftrightarrow |-\lambda + 2| = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \Leftrightarrow |-\lambda + 2| = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \Leftrightarrow$$

$$(2 - \lambda)^2 = (\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2})^2 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Leftrightarrow -2\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Για $\lambda = 1$, το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου στην ε είναι το $K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και η ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Για $\lambda = 1$, από την εξίσωση (1) παίρνουμε τον κύκλο $C: x^2 + y^2 + x + y = 0$ που έχει κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Από το Μ διέρχονται δύο εφαπτομένες προς τον κύκλο C.

Οι ευθείες που διέρχονται από το Μ έχουν εξίσωση

$$\zeta: y + \frac{1}{2} = \lambda_1 \left(x + \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow 2\lambda_1 x - 2y + 3\lambda_1 - 1 = 0 \text{ ή } x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Αν } \zeta: 2\lambda_1 x - 2y + 3\lambda_1 - 1 = 0, \text{ τότε } d(K, \zeta) = \rho \Leftrightarrow \frac{\left| 2\lambda_1 \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3\lambda_1 - 1 \right|}{\sqrt{(2\lambda_1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{|-\lambda_1 + 1 + 3\lambda_1 - 1|}{\sqrt{4\lambda_1^2 + 4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2|\lambda_1|}{\sqrt{4(\lambda_1^2 + 1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{2|\lambda_1|}{2\sqrt{\lambda_1^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2|\lambda_1| = \sqrt{2}\sqrt{\lambda_1^2 + 1} \Leftrightarrow 4\lambda_1^2 = 2\lambda_1^2 + 2 \Leftrightarrow 2\lambda_1^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda_1^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \pm 1.$$

Για $\lambda_1 = 1$ από την εξίσωση της ζ προκύπτει η $\zeta_1: 2x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.

Για $\lambda_1 = -1$ από την εξίσωση της ζ προκύπτει η $\zeta_2: -2x - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$.

Οι ζ_1, ζ_2 είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες του κύκλου C από το σημείο M .

22280. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο $O(0,0)$ θεωρούμε τους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ (1) και $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ (2) αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων.

β) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

γ) Έστω M, N τυχαία σημεία των κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων M και N .

Λύση

α) (1) $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 9 + 16 - 21 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$, οπότε ο κύκλος (1) έχει κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$.

(2) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, οπότε ο κύκλος (2) έχει κέντρο $\Lambda(-1,1)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$.

β) Είναι $(K\Lambda) = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-4)^2} = 5$ και $\rho_1 + \rho_2 = 3$.

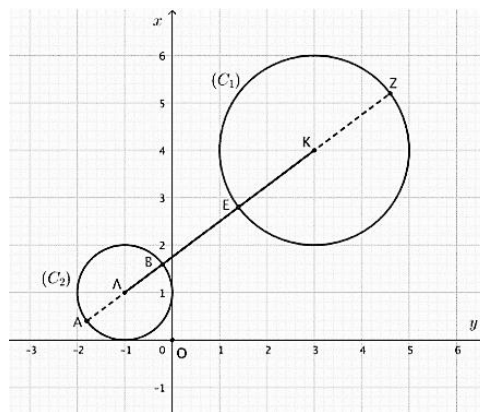
Επειδή $(K\Lambda) > \rho_1 + \rho_2$ συμπεραίνουμε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

γ) Φέρουμε τη διακεντρική ευθεία $K\Lambda$, η οποία τέμνει τον κύκλο (K, R) στα σημεία E και Z και τον κύκλο (Λ, ρ) στα σημεία A και B , όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ελάχιστη απόσταση του τυχαίου σημείου M του κύκλου (K, R) από το τυχαίο σημείο N του κύκλου

(Λ, ρ) ισούται με (BE) , οπότε:

$$(BE) = (K\Lambda) - (EK) - (\Lambda B) = (K\Lambda) - \rho_1 - \rho_2 = 2.$$

Η μέγιστη απόσταση του τυχαίου σημείου M του κύκλου (K, R) από το τυχαίο σημείο N του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (AZ) , οπότε: $(AZ) = (K\Lambda) + (\Lambda A) + (KZ) = (K\Lambda) + \rho_1 + \rho_2 = 8$.



22508. Οι κορυφές Α και Γ, ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι τα σημεία (1,4) και (3,0) αντιστοίχως.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου

τμήματος ΑΓ γράφεται στη μορφή $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα γράφεται στη μορφή $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών Β, Δ του τετραγώνου.

Λύση

α) Το μέσο Κ του ευθυγράμμου τμήματος έχει συντεταγμένες $x_K = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = 2$, $y_K = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = 2$, άρα

$K(2,2)$. Έστω μ η μεσοκάθετος του ΑΓ. Είναι $\lambda_{\text{ΑΓ}} = \frac{0-4}{3-1} = -2$ και

$\text{ΑΓ} \perp \mu \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΓ}} \lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow -2\lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow \lambda_\mu = \frac{1}{2}$, οπότε η μ έχει εξίσωση:

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1.$$

β) Το κέντρο του κύκλου διαμέτρου είναι το σημείο Κ και η ακτίνα είναι ίση με

$$\rho = (AK) = \sqrt{(1-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Επομένως η εξίσωση του κύκλου διαμέτρου ΑΓ είναι $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

γ) Οι ζητούμενες κορυφές του τετραγώνου ισαπέχουν από τα σημεία Α, Γ και βλέπουν το ΑΓ υπό ορθή γωνία, άρα είναι τα σημεία τομής της μεσοκαθέτου του τμήματος και του κύκλου διαμέτρου ΑΓ.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ (x - 2)^2 + \left(\frac{1}{2}x + 1 - 2\right)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \quad (1) \\ (x - 2)^2 + \left(\frac{x - 2}{2}\right)^2 = 5 \end{cases}.$$

$$(x - 2)^2 + \frac{(x - 2)^2}{4} = 5 \Leftrightarrow 4(x - 2)^2 + (x - 2)^2 = 20 \Leftrightarrow 5(x - 2)^2 = 20 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$x - 2 = \pm 2 \Leftrightarrow (x = 0) \text{ ή } (x = 4).$$

Για $x = 0$ είναι $y = 1$ και για $x = 4$ είναι $y = 3$, επομένως οι ζητούμενες κορυφές έχουν συντεταγμένες (4,3) και (0,1).

33696. Το κέντρο ενός κύκλου (c) βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και είναι σημείο της ευθείας (ε): $y = 2x - 1$. Ο κύκλος (c) έχει ακτίνα $\rho = 3\sqrt{2}$ και η ευθεία (ζ): $x + y - 2 = 0$ εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο Α.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (c) είναι $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 18$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση της ευθείας ΚΑ είναι η $x - y + 2 = 0$.

ii. Είναι $A(0,2)$.

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΛΜ, όπου Μ και Λ είναι τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τον κύκλο (c).

Λύση

α) Έστω $K(x_0, y_0)$ με $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, τότε επειδή το Κ ανήκει στην ε, ισχύει ότι $y_0 = 2x_0 - 1$ (1).

$$\text{Είναι } d(K, \zeta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|x_0 + y_0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |x_0 + 2x_0 - 1 - 2| = 3(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow |3x_0 - 3| = 6 \Leftrightarrow$$

$$3|x_0 - 1| = 6 \Leftrightarrow |x_0 - 1| = 2 \Leftrightarrow (x_0 - 1 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 3) \text{ ή } (x_0 - 1 = -2 \Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ απορρίπτεται}).$$

Τότε $y_0 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, οπότε $K(3, 5)$ και ο κύκλος έχει εξίσωση

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 18.$$

β) i. Επειδή η ΚΑ είναι ακτίνα, είναι $KA \perp \zeta \Leftrightarrow \lambda_{KA} \cdot \lambda_{\zeta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{KA} \cdot \frac{-1}{1} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{KA} = 1$, οπότε η ΚΑ έχει εξίσωση: $y - 5 = x - 3 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$.

ii. Επειδή το Α είναι κοινό σημείο των ΚΑ, ζ, για τις συντεταγμένες του έχουμε:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0^{(+)} \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και } 0 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2, \text{ άρα}$$

$A(0, 2)$.

γ) Επειδή τα σημεία Μ, Λ ανήκουν στην ε που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, η ΜΛ είναι διάμετρος του κύκλου, οπότε $(ML) = 2\rho = 6\sqrt{2}$.

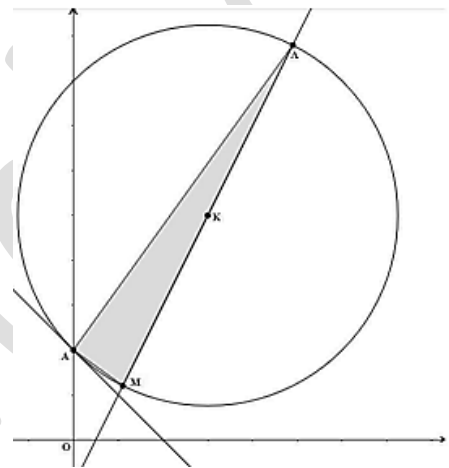
Είναι ε: $y = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$.

Το ύψος υ του τριγώνου είναι η απόσταση του Α από τη ΜΛ,

$$\text{δηλαδή από την ε, άρα } v = d(A, \varepsilon) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Οπότε

$$(AM\Lambda) = \frac{1}{2}(ML) \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{9\sqrt{10}}{5}.$$



Παραβολή

2ο Θέμα

18242. Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

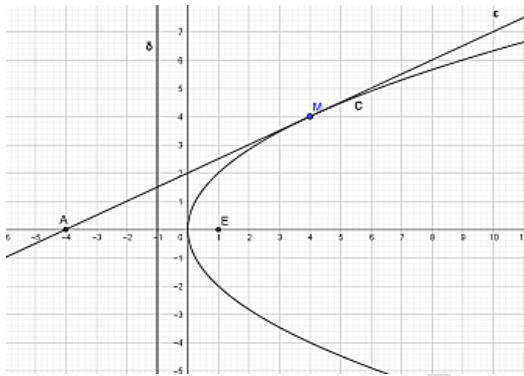
- α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C .
β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της $M(4,4)$.
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε).

Λύση

α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$ οπότε η εστία έχει συντεταγμένες $E(1,0)$ και η διευθετούσα είναι η $\delta: x = -1$.

β) Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1) \Leftrightarrow 4y = 2(x + 4) \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$.

γ)



18701. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x^2$ (1).

- α)** Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $A(2,2)$.
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή (1), την εστία, τη διευθετούσα και την εφαπτομένη της παραβολής.

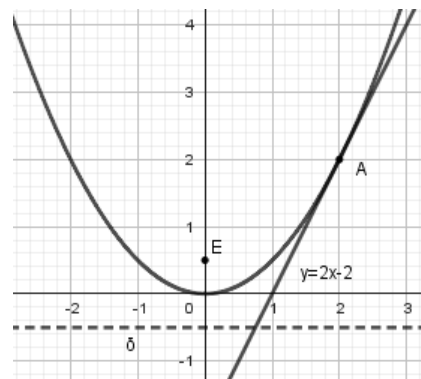
Λύση

α) $y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y$. Είναι $2p = 2 \Leftrightarrow p = 1$ οπότε η εστία έχει συντεταγμένες $E\left(0, \frac{1}{2}\right)$ και η

διευθετούσα είναι η $\delta: y = -\frac{1}{2}$.

β) $xx_1 = p(y + y_1) \Leftrightarrow 2x = y + 2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

γ) σχήμα



20235. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 8x - 2y + 3 = 0$.

Λύση

α) Είναι $2p = 8 \Leftrightarrow p = 4$ οπότε η εστία έχει συντεταγμένες $E(2,0)$ και η διευθετούσα είναι η $\delta: x = -2$.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής C στο $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$ είναι η ευθεία $\varepsilon_1: y \cdot 1 = 4\left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y = 4x + \frac{1}{2}$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 4$.

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{8}{-2} = 4$, οπότε $\lambda_\varepsilon = \lambda_1 \Leftrightarrow \varepsilon // \varepsilon_1$.

21248. Δίνεται το σημείο $E(2,0)$, η ευθεία $\delta_1: x = -2$ και τυχαίο σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου.

α) i. Να βρείτε την απόσταση (ME) του σημείου $M(x, y)$ από το $E(2,0)$ ως συνάρτηση των x, y .

ii. Να βρείτε την απόσταση $d(M, \delta)$ του σημείου M από την ευθεία δ ως συνάρτηση των x, y .

β) Αν ισχύει $(ME) = d(M, \delta)$ να δείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$.

Λύση

α) i. $(ME) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

ii. $d(M, \delta) = |x + 2|$

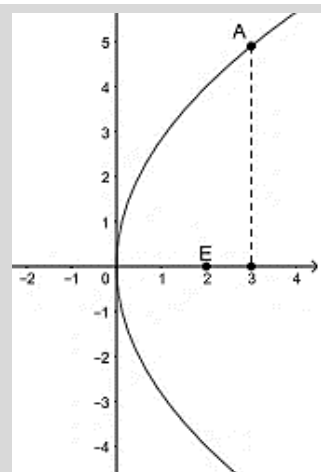
β) $(ME) = d(M, \delta) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = |x + 2| \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow y^2 = 8x$.

21306. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $x'x$, κορυφή $O(0,0)$ και εστία $E(2,0)$, όπως στο διπλανό σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.

β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο A .



Λύση

α) Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και κορυφή $O(0,0)$ έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Άρα $\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$, οπότε η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2 \cdot 4x = 8x$.

Το σημείο $A(3, y_A)$ της παραβολής έχει $y_A > 0$, εφόσον βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy .

Οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής.

$$\text{Επομένως } y_A^2 = 8 \cdot 3 = 24 \Leftrightarrow y_A = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ και } A(3, 2\sqrt{6}).$$

β) Η διευθετούσα (δ) της παραβολής είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{p}{2} = -2$.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο της A έχει εξίσωση:

$$y \cdot 2\sqrt{6} = 4(x+3) \Leftrightarrow y\sqrt{6} - 2x - 6 = 0.$$

21307. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0,3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3.

β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία $A(6,3)$ και $B(-6,3)$, αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2).

Λύση

α) Είναι $2p = 12 \Leftrightarrow p = 6$, Η εστία είναι η $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ή $E(0,3)$.

Το σημείο $(x_0, 3)$ ανήκει στην παραβολή, άρα: $x_0^2 = 12 \cdot 3 = 36 \Leftrightarrow x_0 = \pm 6$.

Επομένως $A(6,3)$ και $B(-6,3)$ είναι τα ζητούμενα σημεία.

β) Η ε_1 έχει εξίσωση $x \cdot 6 = 6(y+3) \Leftrightarrow x = y+3 \Leftrightarrow y = x-3$ και η ε_2 έχει εξίσωση

$$x \cdot (-6) = 6(y+3) \Leftrightarrow -x = y+3 \Leftrightarrow y = -x-3.$$

γ) Είναι $\begin{cases} y = x-3 \\ y = -x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-3 \\ x-3 = -x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-3 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 0 \end{cases}$, άρα το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι το σημείο $(0, -3)$.

22190. Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = x$ (1).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ).

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,-1)$ είναι σημείο της παραβολής.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της $A(1,-1)$.

Λύση

α) Είναι $2p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{4}$, οπότε η εστία E έχει συντεταγμένες $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

β) Το σημείο A ανήκει στη παραβολή αν και μόνο αν $(-1)^2 = 1$ που ισχύει.

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο A έχει εξίσωση $y \cdot (-1) = \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

22267. Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Η εστία της E, έχει συντεταγμένες $E(.....,)$ και η διευθετούσα έχει εξίσωση».

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο $A(1, -2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής.

Λύση

α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 1$.

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή**. Η εστία της E, έχει συντεταγμένες **$E(1,0)$** και η διευθετούσα έχει εξίσωση **$x = -1$** ».

β) Η εφαπτομένη της παραβολής στο A έχει εξίσωση $\varepsilon: y \cdot (-2) = 2(x+1) \Leftrightarrow y = -x - 1$.

γ) Για $y = 0$ η ε γίνεται $-x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, δηλαδή η ε τέμνει τον $x'x$ στο $B(-1, 0)$.

Επειδή η διευθετούσα της παραβολής έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$, δηλαδή $x = -1$, το B είναι σημείο της διευθετούσας.

4ο Θέμα

15394. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή

C: $y^2 = 12x$ με εστία E και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C)

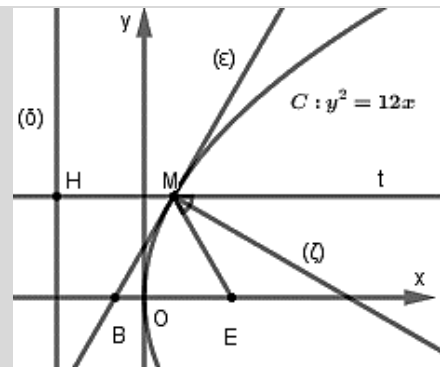
στο σημείο της $M(1, 2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B. Από το σημείο M φέρνουμε ημιευθεία Mt παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο H.

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B, H, E.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο MEBH είναι ρόμβος.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία EMt.



Λύση

α) Είναι $2p = 12 \Leftrightarrow p = 6$.

Η ε έχει εξίσωση $y \cdot 2\sqrt{3} = 6(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{6}{2\sqrt{3}}(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}(x+1) = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.

β) Είναι $\frac{p}{2} = 3$, οπότε η εστία E έχει συντεταγμένες $(3, 0)$ και η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x = -3$.

Για $y = 0$ η ε γίνεται: $0 = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -1 < \text{άρα } B(-1, 0)$.

Η ευθεία Mt έχει εξίσωση $y = 2\sqrt{3}$, οπότε το H έχει συντεταγμένες $(-3, 2\sqrt{3})$.

γ) Είναι $(MH) = 1 + 3 = 4$ και $(BE) = 1 + 3 = 4$. Επειδή $MH \parallel BE$ και $(MH) = (BE)$, το τετράπλευρο MEBH έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $(ME) = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2\sqrt{3})^2} = 4$, άρα το ΜΕΒΗ έχει επιπλέον και δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής, γνωρίζουμε ότι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) στο σημείο επαφής Μ, διχοτομεί την γωνία ΕΜt όπου Ε η εστία της παραβολής. Αρκεί λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (ε) στο Μ.

Είναι $\varepsilon \perp \zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε η (ζ) έχει εξίσωση:

$$y - 2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

18245. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C.

β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $O(0,0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ .

δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ. Αν από το Μ διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ , να δείξετε ότι το Μ ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της Ε.

Λύση

α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 1$, άρα $E(1,0)$ και $\delta: x = -1$.

β) Είναι $\begin{cases} \lambda^2 - 1 = 0 \\ 2\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$ αδύνατο, άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $\lambda^2 - 1 \neq 0$ ή $2\lambda \neq 0$, οπότε η (1)

παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν διέρχονταν από το τα Ο, τότε

$(\lambda^2 - 1) \cdot 0 + 2\lambda \cdot 0 + \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1$ αδύνατη, άρα δεν διέρχεται από το Ο.

γ) Αν $\lambda \neq 0$ τότε η (1) γίνεται $2\lambda y = -(\lambda^2 - 1)x - \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}x - \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda}$ και είναι ευθεία που δεν

είναι κάθετη στον $x'x$ όπως η διευθετούσα δ. Αν $\lambda = 0$ τότε η (1) γίνεται $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

και δεν είναι πάλι η δ, άρα η δ δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ .

δ) Επειδή το Μ δεν ανήκει στη διευθετούσα, είναι $\alpha \neq -1$. Για να διέρχεται μία από τις ευθείες ε_λ από το Μ πρέπει η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)\alpha + 2\lambda\beta + \lambda^2 + 1 = 0$ να έχει μοναδική λύση ως προς λ.

Είναι $(\lambda^2 - 1)\alpha + 2\lambda\beta + \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2\alpha - \alpha + 2\lambda\beta + \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\alpha + 1) + 2\lambda\beta + 1 - \alpha = 0$.

Η εξίσωση αυτή ως προς λ είναι 2ου βαθμού και έχει μοναδική λύση μόνο όταν

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\beta)^2 - 4(\alpha + 1)(1 - \alpha) = 0 \Leftrightarrow 4\beta^2 - 4(1 - \alpha^2) = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 1 + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$ που σημαίνει

ότι οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Επομένως το Μ ανήκει στον

μοναδιαίο κύκλο ο οποίος διέρχεται από την εστία $E(1,0)$ της παραβολής, αφού $1^2 + 0^2 = 1$.

18372. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$ και την παραβολή $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB .

γ) Αν $M(1, -2)$ και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$.

Είναι $\frac{p}{2} = 1$, οπότε η εστία E έχει συντεταγμένες $(1, 0)$ και η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x = -1$.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ δίνεται από την εξίσωση:

$$yy_1 = 2(x + x_1) \Leftrightarrow y = \frac{2}{y_1} + \frac{2x_1}{y_1}. \text{ Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι } \lambda_e = \frac{2}{y_1} \text{ και ο}$$

συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι $\lambda_{AB} = \frac{-4+2}{0+2} = -1$.

Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην AB πρέπει $\lambda_e = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = -1 \Leftrightarrow y_1 = -2$.

Επειδή όμως το σημείο M ανήκει στην παραβολή θα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή $y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow 4 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1$, άρα $M(1, -2)$.

γ) Η εφαπτομένη ευθεία (ϵ) της παραβολής στο σημείο της $M(1, -2)$ έχει εξίσωση $y(-2) = 2(x+1) \Leftrightarrow y = -x-1$.

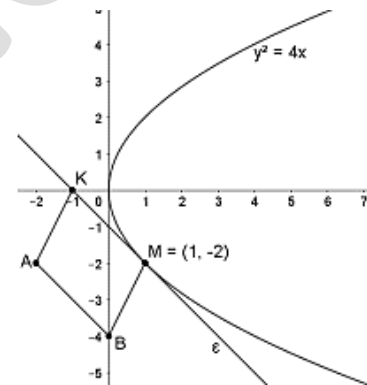
Για $y = 0$ είναι $-x-1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Επομένως το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $K(-1, 0)$.

$$\text{Είναι } (KM) = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-0)^2} \Leftrightarrow (KM) = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \text{ και}$$

$$(AB) = \sqrt{(0+2)^2 + (-4+2)^2} \Leftrightarrow (AB) = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}.$$

Τα τμήματα AB και KM είναι ίσα και παράλληλα, επομένως το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.



18741. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = \alpha \cdot x$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(16, \alpha+4)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$.

β) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ_1 της παραβολής C η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\epsilon_2: -x + 2y + 4 = 0$.

δ) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου C_1 με κέντρο την κορυφή της παραβολής C ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία ϵ_1 του ερωτήματος γ).

Λύση

α) Η παραβολή διέρχεται από το σημείο M οπότε $(\alpha+4)^2 = 16\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 8\alpha + 16 = 16\alpha \Leftrightarrow$

$$\alpha^2 - 8\alpha + 16 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4.$$

β) Είναι $C: y^2 = 4x$ οπότε η παραβολή έχει εστία $E(1, 0)$ και διευθετούσα $(\delta): x = -1$.

γ) Αν (ε_1) η εφαπτομένη της παραβολής είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}$ οπότε $(\varepsilon_1): y = \frac{1}{2}x + \beta, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι: } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \beta \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \beta \\ x = \frac{y^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{y^2}{8} + \beta \\ x = \frac{y^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y = y^2 + 8\beta \\ x = \frac{y^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 8y + 8\beta = 0 \\ x = \frac{y^2}{4} \end{cases}.$$

Για να έχουν ένα κοινό σημείο πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow 64 - 32\beta = 0 \Leftrightarrow 32\beta = 64 \Leftrightarrow \beta = 2$ οπότε

$$(\varepsilon_1): y = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow 2y = x + 4 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0.$$

δ) Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0,0)$, το οποίο είναι η κορυφή της παραβολής.

$$\text{Αν } \rho \text{ η ακτίνα του κύκλου είναι } d(O, \delta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{5}} = \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Επομένως ο κύκλος έχει εξίσωση } x^2 + y^2 = \frac{16}{5}.$$

18870. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(4,4)$ και η AK κάθετη στην (ε) .

Μία φωτεινή ακτίνα (ζ) , ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M .

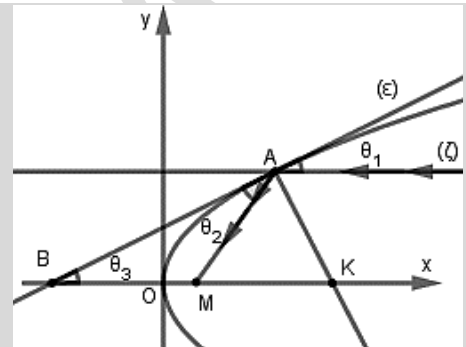
Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής.



Λύση

α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 1$, άρα $E(1,0)$ και $\delta: x = -1$.

β) Η ευθεία ε είναι εφαπτομένη της παραβολής στο $A(4,4)$, οπότε έχει εξίσωση:

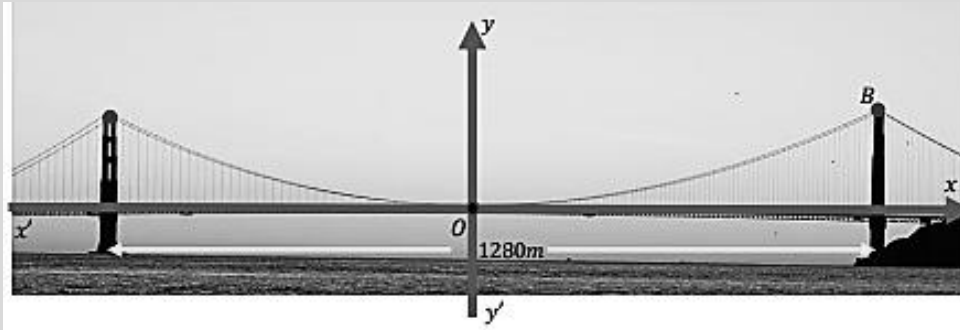
$$4y = 2(x + 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2. \text{ Για } y = 0 \text{ είναι } \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -2 \Leftrightarrow x = -4, \text{ οπότε } \varepsilon \text{ τέμνει τον άξονα } x'x \text{ στο σημείο } B(-4,0).$$

γ) Είναι $(MA) = \sqrt{(4-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ και $(MB) = 1+4 = 5$.

Επειδή $(MA) = (MB)$ το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

δ) Έστω $M(x, 0)$, τότε $(MA) = (MB) \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + 16} = |x+4| \Leftrightarrow (x-4)^2 + 16 = (x+4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + 16 = x^2 + 8x + 16 \Leftrightarrow 16x = 16 \Leftrightarrow x = 1$, άρα $M(1,0)$ οπότε το M ταυτίζεται με την εστία E .

19047. Στην Golden Gate γέφυρα του San Francisco, το κεντρικό καλώδιο θεωρούμε προσεγγιστικά ότι αποτελεί τμήμα παραβολής. Οι δύο βασικοί πυλώνες απέχουν μεταξύ τους 1280m, ενώ το ύψος του κάθε πυλώνα σε σχέση με το οδόστρωμα της γέφυρας είναι 160m. Γνωρίζουμε ότι το κατώτερο σημείο του παραβολικού καλωδίου αγγίζει τη γέφυρα στο μέσο της απόστασης των δύο πυλώνων. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, όπως στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής του κεντρικού καλωδίου σ' αυτό το σύστημα των αξόνων είναι $x^2 = 2560y$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) της παραβολής.

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο B(640,160) τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $ED = EB$.

Λύση

α) Έστω A το συμμετρικό του B ως προς τον άξονα y'y, τότε $(AB) = 1280m$, οπότε $x_A = -640$, $x_B = 640$. Επειδή το ύψος του κάθε πυλώνα σε σχέση με το οδόστρωμα της γέφυρας είναι 160m, είναι $y_A = y_B = 160$, οπότε $A(-640, 160)$ και $B(640, 160)$.

Η παραβολή έχει εξίσωση της μορφής $x^2 = 2py$ και επειδή διέρχεται από τα A, B, ισχύει ότι:

$$640^2 = 2p \cdot 160 \Leftrightarrow 320p = 640 \cdot 640 \Leftrightarrow p = \frac{640 \cdot 640}{320} = 1280, \text{ οπότε η παραβολή έχει εξίσωση } x^2 = 2560y.$$

β) Είναι $\frac{p}{2} = 640$, οπότε $E(0, 640)$ και (δ): $y = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow y = -640$.

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο B έχει εξίσωση: $x \cdot 640 = 1280(y + 160) \Leftrightarrow x = 2y + 320$. Για $x = 0$ είναι $2y + 320 = 0 \Leftrightarrow 2y = -320 \Leftrightarrow y = -160$, άρα $\Delta(0, -160)$.

$$\text{Είναι } (E\Delta) = |-160 - 640| = 800 \text{ και } (EB) = \sqrt{640^2 + (640 - 160)^2} = \sqrt{640^2 + 480^2} \Leftrightarrow$$

$$(EB) = \sqrt{64^2 \cdot 10^2 + 48^2 \cdot 10^2} = \sqrt{(64^2 + 48^2) \cdot 10^2} \Leftrightarrow$$

$$(EB) = 10\sqrt{(8^2 \cdot 8^2 + 8^2 \cdot 6^2)} = 10\sqrt{8^2(8^2 + 6^2)} = 10 \cdot 8 \cdot \sqrt{100} = 80 \cdot 10 = 800, \text{ άρα } (E\Delta) = (EB).$$

20090. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και $M(x_0, y_0)$, $y_0 > 0$, ένα σημείο της.

α) Αν A είναι η προβολή του M στη διευθετούσα της παραβολής,

i. Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των σημείων M και A συναρτήσει της τεταγμένης y_0 του σημείου M .

ii. Αν E είναι η εστία της παραβολής, να βρείτε το σημείο M για το οποίο $(MAE) = \frac{5}{8} \tau.μ.$

β) Αν $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και ε η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο M , να αποδείξετε ότι το

τετράπλευρο $AMEM'$ είναι ρόμβος, όπου E είναι η εστία της παραβολής και M' το σημείο που η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) i. Επειδή το M είναι σημείο της παραβολής, ισχύει ότι

$$y_0^2 = 4x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{y_0^2}{4}, \text{ άρα } M\left(\frac{y_0^2}{4}, y_0\right).$$

$$\text{Είναι } 2p = 4 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow \frac{P}{2} = 1, \text{ άρα } E(1,0) \text{ και } \delta: x = -1.$$

Επειδή $MA \parallel x'x$ είναι $y_A = y_M = \frac{y_0^2}{4}$, οπότε το A έχει

$$\text{συντεταγμένες } \left(-1, \frac{y_0^2}{4}\right).$$

$$\text{ii. Είναι } \overrightarrow{MA} = \left(-1 - \frac{y_0^2}{4}, 0\right), \overrightarrow{EM} = \left(\frac{y_0^2}{4} - 1, y_0\right).$$

$$\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{EM}) = \begin{vmatrix} -1 - \frac{y_0^2}{4} & 0 \\ \frac{y_0^2}{4} - 1 & y_0 \end{vmatrix} = y_0 \left(-1 - \frac{y_0^2}{4}\right) = -\frac{4y_0 + y_0^2}{4}.$$

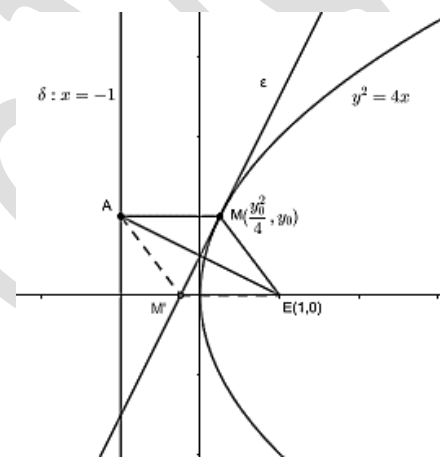
$$(MAE) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{EM})| = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \left| -\frac{4y_0 + y_0^2}{4} \right| = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{5y_0 > 0}{4} \frac{4y_0 + y_0^2}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4y_0 + y_0^2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$y_0^2 + 4y_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 1 \text{ ή } y_0 = -5 \text{ απορρίπτεται. Άρα } M\left(\frac{1}{4}, 1\right).$$

$$\text{β) Η } \varepsilon \text{ έχει εξίσωση } y \cdot 1 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow y = 2x + \frac{1}{2}. \text{ Για } y=0 \text{ είναι } 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}, \text{ άρα } M'\left(-\frac{1}{4}, 0\right).$$

$$\text{Είναι } |\overrightarrow{MA}| = \frac{1}{4} - (-1) = \frac{5}{4}, |\overrightarrow{ME}| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} = \frac{5}{4} \text{ και όμοια } |\overrightarrow{M'E}| = |\overrightarrow{M'A}| = \frac{5}{4}, \text{ οπότε το τετράπλευρο}$$

$AMEM'$ έχει και τις 4 πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.



20092. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση $\varepsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$.

- α) i.** Να δείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την ε .
ii. Αν η ευθεία ε τέμνει του άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5$ τ.μ.
β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ζ της παραβολής με η παράλληλη στην ε .
ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών η και ε ;

Λύση

α) i. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής $y^2 = 4x$ και της ευθείας ε είναι αδύνατο.

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ 4x - 3y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{4} = x \\ y^2 - 3y + 12 = 0 \end{cases}$$

Το τριώνυμο $y^2 - 3y + 12$, έχει $\Delta < 0$ άρα η εξίσωση $y^2 - 3y + 12 = 0$ είναι αδύνατη, οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

$$\text{Είναι } d(M, \varepsilon) = \frac{\left| 4 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot 1 + 12 \right|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

ii. Στην ε για $y=0$ έχουμε $4x+12=0 \Leftrightarrow x=-3$ και για $x=0$ έχουμε $-3y+12=0 \Leftrightarrow y=4$, άρα $\Gamma(-3,0)$ και $\Delta(0,4)$.

$$\text{Είναι } \overrightarrow{M\Gamma} = \left(-3 - \frac{1}{4}, 0 - 1\right) = \left(-\frac{13}{4}, -1\right) \text{ και } \overrightarrow{\Gamma\Delta} = (0 + 3, 4 - 0) = (3, 4).$$

$$\text{Είναι } \det(\overrightarrow{M\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \begin{vmatrix} -\frac{13}{4} & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -13 + 3 = -10 \text{ και } (M\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{M\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta})| = 5.$$

β) i. Έστω $K(x_1, y_1)$ με $y_1 \neq 0$ τυχαίο σημείο της παραβολής.

Η εφαπτομένη της παραβολής στο K έχει εξίσωση $yy_1 = 2(x + x_1) \Leftrightarrow y = \frac{2}{y_1}x + \frac{2x_1}{y_1}$ και ο συντελεστής

$$\text{διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι } \lambda_\zeta = \frac{2}{y_1} \text{ και } \lambda_\varepsilon = \frac{4-0}{0+3} = \frac{4}{3}.$$

$$\varepsilon // \zeta \Leftrightarrow \lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 4y_1 = 6 \Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Επειδή το } K \text{ είναι σημείο της παραβολής, ισχύει ότι } y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4x_1 \Leftrightarrow \frac{9}{4} = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{9}{16}.$$

$$\text{Τότε η } \zeta \text{ έχει εξίσωση } y = \frac{2}{\frac{3}{2}}x + \frac{2 \cdot \frac{9}{16}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}x + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 12y = 16x + 9 \Leftrightarrow 16x - 12y + 9 = 0.$$

ii. Για να βρούμε την απόσταση των ευθειών η και ε , αρκεί να βρούμε ένα σημείο, έστω Λ , της η και να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ε .

Για $x = 0$ η ζ γίνεται $-12y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}$, άρα $\Lambda\left(0, \frac{3}{4}\right)$.

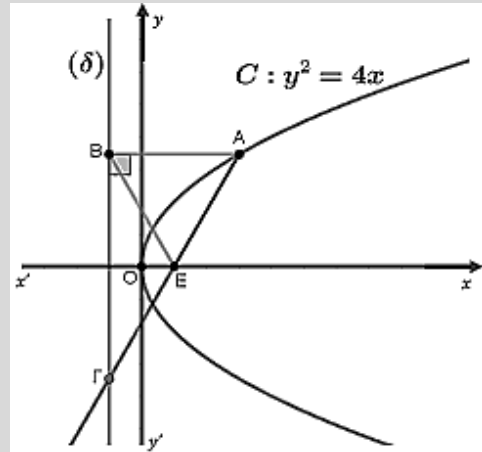
$$d(\zeta, \varepsilon) = d(\Lambda, \varepsilon) = \frac{\left|4 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{3}{4} + 12\right|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{\left|-\frac{9}{4} + \frac{48}{4}\right|}{5} = \frac{39}{20}.$$

20684. Ένα σημείο $A(x_A, y_A)$ της παραβολής $C: y^2 = 4x$ με $x_A > 0$, $y_A > 0$, έχει την εξής ιδιότητα: η ημιευθεία AE τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Γ , έτσι όμως ώστε η εστία E της παραβολής C , να είναι το μέσο του τμήματος $A\Gamma$. Επίσης, από το σημείο A φέρνουμε κάθετη στην διευθετούσα (δ) και έστω B το σημείο τομής, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισόπλευρο.

β) Να αποδείξετε ότι $x_A = 3$ και $y_A = 2\sqrt{3}$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α) Από τον ορισμό της παραβολής, έχουμε ότι $AB = AE$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η BE είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε

$BE = \frac{A\Gamma}{2} = AE$, οπότε το τρίγωνο ABE είναι ισόπλευρο.

β) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 1$, άρα $E(1, 0)$ και $(\delta): x = -1$, άρα $B(-1, y_A)$. Επειδή το Γ είναι σημείο της διευθετούσας έχει $x_\Gamma = -1$. Επειδή το E είναι μέσο του $A\Gamma$, ισχύει ότι

$$x_E = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{x_A - 1}{2} \Leftrightarrow 2 = x_A - 1 \Leftrightarrow x_A = 3. \text{ Είναι } y_A^2 = 4x_A = 12 \Leftrightarrow y_A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

γ) Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο B , ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το E και ακτίνα την AE .

Είναι $(AE) = \sqrt{(3-1)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$, οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση: $(x-1)^2 + y^2 = 16$.

20862. Δίνονται τα σημεία $M(-2, 2)$, $E\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση $y = \frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε την εξίσωση, που εκφράζει το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο E και την ευθεία (ζ) .

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (η) της καμπύλης $C: x^2 + 2y = 0$, που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1) , με εξίσωση $y = x + 4$.

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της καμπύλης C και των ευθειών (ε_1) και (η) . Με τη βοήθεια του σχήματος (ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο) να αποδείξετε ότι η ελάχιστη

απόσταση των σημείων της C από την ευθεία (ε_1) είναι $\frac{7\sqrt{2}}{4}$.

Λύση

α) Η (ε_1) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = \tan 45^\circ = 1$ και εξίσωση $y - 2 = x + 2 \Leftrightarrow y = x + 4$.

β) Το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο E και την ευθεία (ζ) , είναι παραβολή με εστία το E και διευθετούσα τη (ζ) , άρα $\frac{p}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow p = -1$, οπότε η παραβολή έχει εξίσωση: $x^2 = 2py \Leftrightarrow x^2 = -2y$.

γ) i. Έστω $K(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τη παραβολή. Τότε $x_1^2 = -2y_1$ (1). Η εφαπτομένη στο K έχει εξίσωση $(\eta): x \cdot x_1 = -1(y + y_1) \Leftrightarrow x \cdot x_1 = -y - y_1 \Leftrightarrow y = -x \cdot x_1 - y_1$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -x_1$. Επειδή η εφαπτομένη είναι παράλληλη στη (ζ) , ισχύει ότι $\lambda_\zeta = \lambda \Leftrightarrow -x_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -1$

και από την (1) $\Rightarrow 1 = -2y_1 \Leftrightarrow y_1 = -\frac{1}{2}$, οπότε η εφαπτομένη στο K έχει εξίσωση:

$$y = -(-1)x - \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}.$$

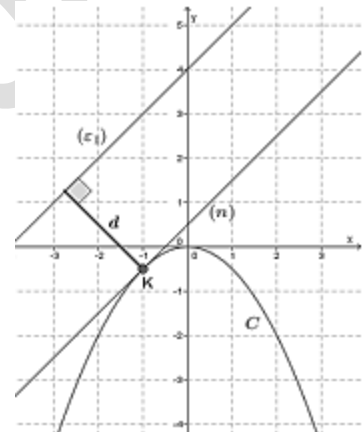
ii. Από το σχήμα προκύπτει ότι η παραβολή βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της (η) εκτός του σημείου K. Επειδή οι ευθείες (η) και (ε_1) είναι παράλληλες, η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με την απόσταση του K από την $(\varepsilon_1): y = x + 4 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0$, που είναι:

$$d(K, \varepsilon_1) = \frac{\left| -1 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -1 + \frac{1}{2} + 4 \right|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow d(K, \varepsilon_1) = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}.$$

Αν Λ οποιοδήποτε σημείο της παραβολής, ισχύει ότι:

$d(\varepsilon_1, \eta) = d(K, \varepsilon_1) < d(\Lambda, \varepsilon_1)$, επομένως η ελάχιστη απόσταση των

σημείων της C από την ευθεία (ε_1) είναι $\frac{7\sqrt{2}}{4}$.



21653. Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, το 1ο τεταρτημόριο αντιστοιχεί σε μια θαλάσσια περιοχή και τα υπόλοιπα τεταρτημόρια σε στεριά.

Οι ημιάξονες Ox, Oy οριοθετούν ένα λιμάνι.

Ένα πλοίο ρυμουλκείται στο λιμάνι, δεμένο με δύο συρματόσχοινα στο ίδιο σημείο $\Pi(\kappa, \lambda)$ του πλοίου.

Το ένα από τα δύο ρυμουλκά είναι σταθερό στο σημείο $E(2,0)$ και το άλλο κινείται ώστε η θέση να περιγράφεται από το σημείο $P(-2, \lambda)$. Η ρυμούλκηση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης να ισχύει $(\Pi E) = (\Pi P)$.

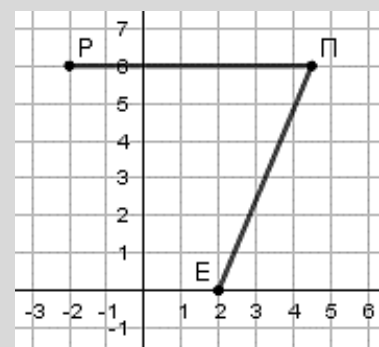
α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $P(-2, \lambda)$

κινείται σε σταθερή ευθεία (δ) της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης είναι $\Pi P \perp (\delta)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η πορεία του $\Pi(\kappa, \lambda)$ είναι παραβολή C της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

δ) Αν $y^2 = 8x$ η εξίσωση της παραβολής C να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή η μεσοκάθετος του EP εφάπτεται της παραβολής C στο σημείο Π .



Λύση

α) Το σημείο P έχει σταθερή τετμημένη και μεταβαλλόμενη τεταγμένη οπότε κινείται πάνω στην κατακόρυφη ευθεία (δ): $x = -2$.

β) Τα σημεία P και Π κάθε χρονική στιγμή έχουν ίδια τεταγμένη ίση με λ άρα $PP' \parallel x'x$ άρα $PP' \perp (\delta)$.

γ) Αφού κάθε χρονική στιγμή είναι $(ΠΕ) = (ΠΡ) \Leftrightarrow (ΠΕ) = d(\delta, \Pi)$ τότε το Π κινείται στην παραβολή με διευθετούσα την (δ): $x = -2$ και εστία το E(2,0). Άρα έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ με $\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$ άρα τελικά είναι C: $y^2 = 8x$.

δ) Το μέσο του EP είναι $M\left(0, \frac{\lambda}{2}\right)$ και έστω (ε) η μεσοκάθετη του EP. Είναι $\lambda_{EP} = \frac{\lambda - 0}{-2 - 2} = -\frac{\lambda}{4}$ και

$$\lambda_{EP} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = \frac{4}{\lambda} \text{ αφού } \lambda > 0$$

(1° τεταρτημόριο το Π). Άρα η μεσοκάθετος (ε) έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y - \frac{\lambda}{2} = \frac{4}{\lambda}(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{4}{\lambda}x + \frac{\lambda}{2} \text{ με } \lambda > 0.$$

$$\text{Από το σύστημα των } \varepsilon, C \text{ έχουμε: } \begin{cases} y = \frac{4}{\lambda}x + \frac{\lambda}{2} \\ y^2 = 8x \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{4}{\lambda}x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = 8x \Leftrightarrow \left(\frac{8x + \lambda^2}{2\lambda}\right)^2 = 8x \Leftrightarrow$$

$64x^2 + 16\lambda^2x + \lambda^4 = 32\lambda^2x \Leftrightarrow 64x^2 - 16\lambda^2x + \lambda^4 = 0$. Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού ως προς x και έχει $\Delta = 0$, οπότε η ε εφάπτεται της παραβολής.

Επειδή το Π είναι σημείο της παραβολής, Ε είναι η εστία της και το Ρ ανήκει στη διευθετούσα της παραβολής, ισχύει ότι $(ΠΕ) = d(\Pi, \delta) \Leftrightarrow (ΠΕ) = (ΠΡ)$.

Επειδή το Π ισαπέχει από τα Ε, Ρ, βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΕΡ, δηλαδή την ε, επομένως η ε εφάπτεται της παραβολής στο Π.

21690. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 3x$ και η ευθεία ε: $3x + 4y + 10 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία και να τις σχεδιάσετε.

β) Έστω $M(x_0, y_0)$ ένα σημείο της παραβολής. Να αποδείξετε ότι η απόστασή του $d(M, \varepsilon)$ από

$$\text{την ευθεία είναι } d(M, \varepsilon) = \frac{(y_0 + 2)^2 + 6}{5}.$$

γ) Να βρείτε το σημείο της παραβολής που είναι το πιο κοντινό στην ευθεία.

δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα γ) είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

Λύση

α) Για τα κοινά σημεία της παραβολής με την ευθεία λύνουμε το σύστημα:

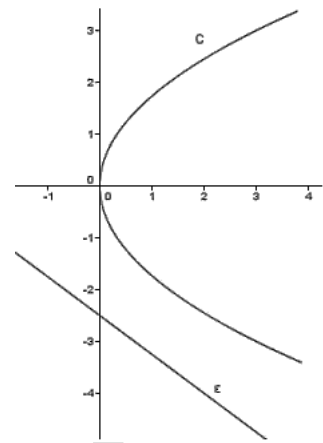
$$\begin{cases} y^2 = 3x \\ 3x + 4y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3x \\ y^2 + 4y + 10 = 0 \end{cases} \quad \text{το οποίο είναι αδύνατο καθώς η}$$

εξίσωση $y^2 + 4y + 10 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -24 < 0$ άρα είναι αδύνατη.

β) Αφού το M είναι σημείο της παραβολής $C: y^2 = 3x$ τότε

$$y_0^2 = 3x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{y_0^2}{3} \quad \text{άρα } M\left(\frac{y_0^2}{3}, y_0\right) \text{ και η απόστασή του από}$$

$$\begin{aligned} \text{την } (\varepsilon) \text{ είναι } d(M, \varepsilon) &= \frac{\left| 3 \frac{y_0^2}{3} + 4y_0 + 10 \right|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|y_0^2 + 4y_0 + 10|}{\sqrt{25}} = \\ &= \frac{|y_0^2 + 4y_0 + 4 + 6|}{5} = \frac{|(y_0 + 2)^2 + 6|}{5} = \frac{(y_0 + 2)^2 + 6}{5}. \end{aligned}$$



γ) Είναι $(y_0 + 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y_0 + 2)^2 + 6 \geq 6 \Leftrightarrow \frac{(y_0 + 2)^2 + 6}{5} \geq \frac{6}{5} \Leftrightarrow d(M, \varepsilon) \geq \frac{6}{5}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $y_0 = -2$. Άρα η μικρότερη απόσταση είναι $\frac{6}{5}$ και το πλησιέστερο σημείο το $M\left(\frac{4}{3}, -2\right)$.

δ) Αν την παραβολή την γράψουμε στην μορφή $y^2 = 2px$ τότε είναι $p = \frac{3}{2}$ και η εφαπτομένη της

$$\text{παραβολής στο } M\left(\frac{4}{3}, -2\right) \text{ έχει εξίσωση } (\zeta): -2y = \frac{3}{2}\left(x + \frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow -2y = \frac{3}{2}x + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - 1$$

Είναι επίσης $\varepsilon: 3x + 4y + 10 = 0 \Leftrightarrow 4y = -3x - 10 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$. Ισχύει ότι $\lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon = -\frac{3}{4}$ άρα $\zeta // \varepsilon$.

21883. Δίνεται η παραβολή $C: x^2 = 4y$ και η ευθεία $y = x - 2$.

α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ε.

γ) Αν $M(x, y)$ είναι σημείο της παραβολής, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του M από την ευθεία ε είναι $d(M, \varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}$.

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου M από την ευθεία ε καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου M της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία.

Λύση

α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 1$, οπότε η εστία E έχει συντεταγμένες (0,1) και η διευθετούσα είναι η ευθεία δ: $y = -1$.

β) Τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4(x - 2) \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4x - 8 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 8 = 0 \quad (1) \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = -16 < 0$, οπότε είναι αδύνατη.
Άρα η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) i. Είναι $\varepsilon: y = x - 2 \Leftrightarrow -x + y + 2 = 0$. Επειδή το M είναι σημείο της παραβολής ισχύει ότι

$$x^2 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}, \text{ άρα το M έχει συντεταγμένες } \left(x, \frac{x^2}{4}\right).$$

$$d(M, \varepsilon) = \frac{\left|-x + \frac{x^2}{4} + 2\right|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{\left|\frac{1}{4}x^2 - x + 2\right|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}, \text{ γιατί το τριώνυμο } \frac{1}{4}x^2 - x + 2 \text{ έχει } \Delta = -1 < 0,$$

οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\frac{1}{4}x^2 - x + 2 > 0$.

$$\text{ii. } d(M, \varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{4}x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + 1 + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow d(M, \varepsilon) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Η ελάχιστη απόσταση του τυχαίου σημείου M της παραβολής από την ε είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$ όταν

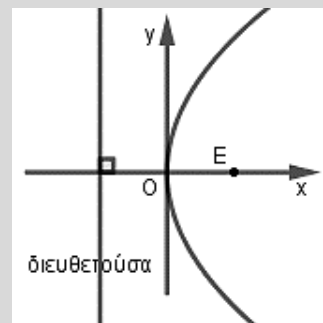
$\frac{1}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2$. Επομένως το ζητούμενο σημείο της παραβολής που απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε είναι το M(2,1).

22465. Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον x' . Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η E(2,0), η διευθετούσα της είναι η $\delta: x = -2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2 = 8x$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της A(2,4) είναι η $\varepsilon: y = x + 2$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ε στο σημείο της A(2,4).



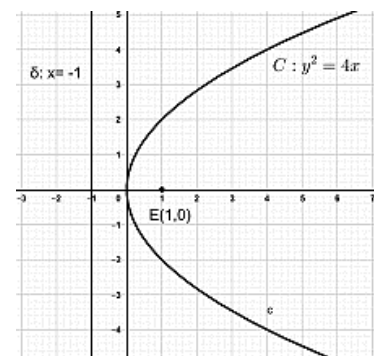
Λύση

α) Είναι $d(E, \delta) = p \Leftrightarrow p = 4$.

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον x' είναι η $y^2 = 2px$, η εστία της

είναι το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και η διευθετούσα έχει εξίσωση $\delta: x = -\frac{p}{2}$.

Είναι E(2,0), $\delta: x = -2$ και C: $y^2 = 8x$.



β) Η εφαπτομένη της παραβολής που διέρχεται από το Α έχει εξίσωση $\varepsilon: y \cdot 4 = 4(x + 2) \Leftrightarrow y = x + 2$.

γ) Έστω $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του κύκλου.

Είναι $KA \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{KA} \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{KA} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{KA} = -1$.

Η ευθεία KA έχει εξίσωση $y - 4 = -(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 6$ και επειδή το K είναι σημείο της, ισχύει ότι $y_0 = -x_0 + 6$ (1).

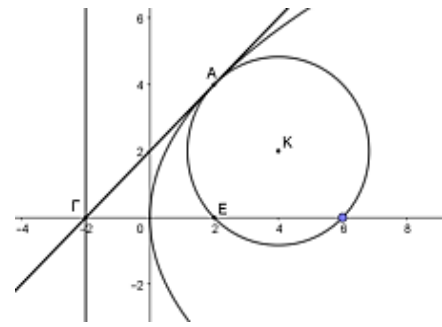
Είναι $(AK) = (EK) \Leftrightarrow \sqrt{(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 4)^2} = \sqrt{(x_0 - 2)^2 + y_0^2} \Leftrightarrow$

$$(\cancel{x_0 - 2})^2 + (y_0 - 4)^2 = (\cancel{x_0 - 2})^2 + y_0^2 \Leftrightarrow$$

$y_0^2 - 8y_0 + 16 = y_0^2 \Leftrightarrow 8y_0 = 16 \Leftrightarrow y_0 = 2$. Τότε από την (1) είναι $2 = -x_0 + 6 \Leftrightarrow x_0 = 4$, άρα το κέντρο K του κύκλου έχει συντεταγμένες $(4, 2)$.

Η ακτίνα ρ του κύκλου είναι $\rho = (KE) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{8}$, οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση:

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 8.$$



22275. Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ .

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$ και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1).

Λύση

α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 1$, άρα $E(1, 0)$ και $\delta: x = -1$.

β) Έστω $M(x_1, y_1)$ σημείο της παραβολής. Τότε $y_1^2 = 4x_1$ (1).

Η εφαπτομένη της παραβολής στο A έχει εξίσωση $\varepsilon: y \cdot y_1 = 2(x + x_1)$.

Η ε διέρχεται από το A , αν και μόνο αν $2 \cdot y_1 = 2(0 + x_1) \Leftrightarrow y_1 = x_1$ (2)

Από τις (1), (2) έχουμε $x_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1(x_1 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ή $x_1 = 4$.

Αν $x_1 = 0$ τότε $y_1 = 0$ και η εφαπτομένη είναι η $y \cdot 0 = 2(x + 0) \Leftrightarrow x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$.

Αν $x_1 = 4$ τότε $y_1 = 4$ και η εφαπτομένη είναι η $y \cdot 4 = 2(x + 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$.

1ο Θέμα

21152.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_0$.

iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο $E(1,0)$.

v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Λύση

α) i. Σωστό . Σελίδα 19 σχολικό βιβλίο.

ii. Λάθος. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $y = y_0$.

iii. Λάθος . Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

iv. Σωστό . Σελίδα 91 σχολικό βιβλίο.

v. Σωστό . Σελίδα 83 σχολικό βιβλίο.

β) Σελίδα 60 σχολικό βιβλίο – Εξίσωση ευθείας.

3ο Θέμα

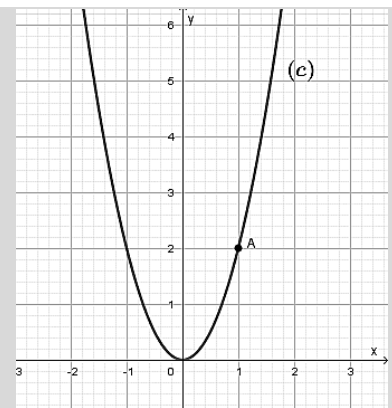
20866. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (c), που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$

α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα της παραβολής.

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο $A'(-1,2)$.

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε.



Λύση

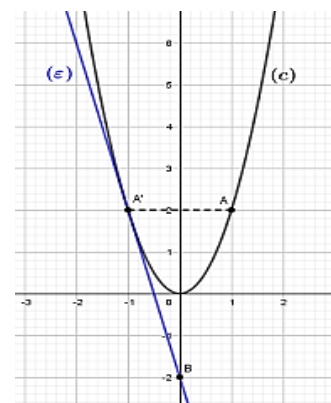
α) Η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον $y'y$ είναι της μορφής $x^2 = 2py$. Επειδή διέρχεται από

το σημείο $A(1,2)$ ισχύει ότι $1 = 4p \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$, άρα (c): $x^2 = \frac{1}{2}y$.

β) Επειδή τα συμμετρικά σημεία ως προς τον άξονα $y'y$ έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη, το συμμετρικό σημείο του $A(1,2)$ είναι το $A'(-1, 2)$.

γ) i. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση ε:

$$x(-1) = \frac{1}{4}(y+2) \Leftrightarrow -4x = y+2 \Leftrightarrow y = -4x-2.$$



ii. Για $x = 0$ η ε γίνεται $y = -2$, οπότε τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,2)$.

Για $y=0$ η ε γίνεται $-4x - 2 = 0 \Leftrightarrow -4x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, άρα η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Ασκησότητες

Έλλειψη

2ο Θέμα

20658. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι $\alpha = 4$, $\beta = 2$ και $\gamma = 2\sqrt{3}$.

β) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης (c).

γ) Να σχεδιάσετε την έλλειψη (c) και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

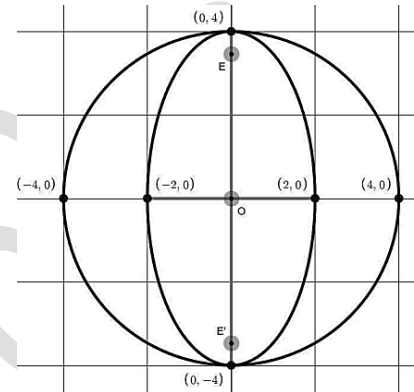
Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$, $\beta^2 = 4 \Leftrightarrow \beta = 2$ και

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 16 - 4 = 12 \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{3}.$$

β) Ο μικρός άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\beta = 2 \cdot 2 = 4$.
Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\alpha = 2 \cdot 4 = 8$.

γ) Ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή O των αξόνων και ακτίνα $\rho = \sqrt{16} = 4$



20718. Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της.

β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

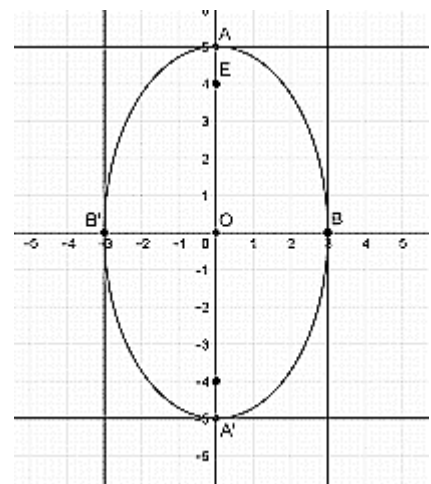
Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, $\beta^2 = 9 \Leftrightarrow \beta = 3$ και

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow \gamma = 4, \text{ οπότε οι εστίες είναι } E'(0, -4) \text{ και } E(0, 4).$$

β) Η έλλειψη C έχει κορυφές τα σημεία A(0,5), A'(0,-5), B(3,0) και B'(-3,0) και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ) Οι εφαπτομένες της C στα A, A', B, B' είναι αντίστοιχα οι ευθείες $y = 5$, $y = -5$, $x = 3$ και $x = -3$.



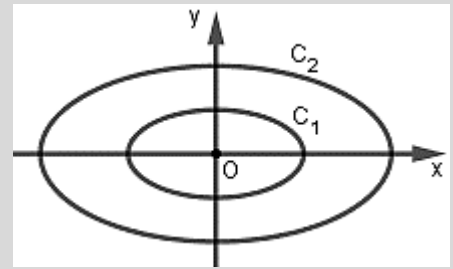
20865. Δίνονται οι ελλείψεις

$$C_1: x^2 + 4y^2 = 4, \quad C_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ και}$$

οι γραφικές τους παραστάσεις στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων.

β) Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές.



Λύση

α) $C_1: x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$

Είναι $\alpha^2 = 4 \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = 2$, $\beta^2 = 1 \xrightarrow{\beta > 0} \beta = 1$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 4 - 1 = 3 \xrightarrow{\gamma > 0} \gamma = \sqrt{3}.$

Η έλλειψη C_1 έχει μεγάλο άξονα με μήκος $2\alpha = 4$, μικρό άξονα με μήκος $2\beta = 2$ και εστίες τα σημεία $E'_1(-\sqrt{3}, 0)$, $E_1(\sqrt{3}, 0).$

$$C_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Είναι $\alpha^2 = 16 \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = 4$, $\beta^2 = 4 \xrightarrow{\beta > 0} \beta = 2$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 16 - 4 = 12 \xrightarrow{\gamma > 0} \gamma = 2\sqrt{3}.$

Η έλλειψη C_2 έχει μεγάλο άξονα με μήκος $2\alpha = 8$, μικρό άξονα με μήκος $2\beta = 4$ και εστίες τα σημεία $E'_2(-2\sqrt{3}, 0)$, $E_2(2\sqrt{3}, 0).$

β) Η έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και η έλλειψη C_2 έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
οπότε οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

20883. Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $C: 16x^2 + 25y^2 = 400.$

α) Να βρείτε τα μήκη BB' , AA' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της E και E' .

β) Αν $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$, να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το E και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

Λύση

α) $C: 16x^2 + 25y^2 = 400 \Leftrightarrow \frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400} \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Είναι $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, $\beta^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \gamma = 3.$

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $(A'A) = 2\alpha = 2 \cdot 5 = 10$,

το μήκος του μικρού άξονα είναι $(B'B) = 2\beta = 2 \cdot 4 = 8$ και οι εστίες είναι $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0).$

β) Θέλουμε η E' να είναι εστία της ζητούμενης παραβολής, άρα $\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = -6$ και η παραβολή έχει εξίσωση $y^2 = 2(-6)x = -12x.$

21308. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:

- α) Τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης και την απόστασή τους.
 β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.
 γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της B(0,4).

Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, $\beta^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \gamma = 3$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι οι E(3,0) και E'(-3,0). Η απόσταση των εστιών είναι $2\gamma = 2 \cdot 3 = 6$.

β) Ο μικρός άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\beta = 2 \cdot 4 = 8$.
 Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\alpha = 2 \cdot 5 = 10$.

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο B έχει εξίσωση: $\frac{x \cdot 0}{25} + \frac{y \cdot 4}{16} = 1 \Leftrightarrow y = 4$.

21647. Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία E(4,0), E'(-4,0) και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της C.
 β) την εκκεντρότητά της C.
 γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$.

Λύση

α) Επειδή η έλλειψη έχει εστίες τα σημεία E(4,0), E'(-4,0), είναι $\gamma = 4$.

Επειδή η C έχει μεγάλο άξονα 10 είναι $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$. Είναι $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \beta = 3$.

Επειδή η έλλειψη έχει εστίες στον x'x η εξίσωση της είναι C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

β) $e = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{5}$.

γ) Η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση $\frac{x \cdot 4}{25} + \frac{y \cdot \frac{9}{5}}{9} = 1 \Leftrightarrow 4x + 5y = 25$.

21648. Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία E(3,0), E'(-3,0) και διέρχεται από το σημείο

$M\left(4, \frac{12}{5}\right)$.

- α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10.
 β) Να βρείτε την εξίσωση της C.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M\left(4, \frac{12}{5}\right)$.

Δίνεται ότι $\sqrt{1369} = 37$.

Λύση

α) Επειδή η έλλειψη έχει εστίες τα σημεία E(3,0), E'(-3,0), είναι $\gamma = 3$.

β) Από τον ορισμό της έλλειψης ισχύει ότι $(ME) + (ME') = 2\alpha \Leftrightarrow$

$$2\alpha = \sqrt{(4-3)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} + \sqrt{(4+3)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} \Leftrightarrow 2\alpha = \sqrt{1 + \frac{144}{25}} + \sqrt{49 + \frac{144}{25}} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha = \sqrt{\frac{169}{25}} + \sqrt{\frac{1369}{25}} = \frac{13}{5} + \frac{37}{5} = \frac{50}{5} = 10. \text{ Επομένως ο μεγάλος άξονας έχει μήκος } 10.$$

γ) Είναι $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$ και $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$.

Επειδή η έλλειψη έχει εστίες στον x' x η εξίσωση της είναι $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση $\frac{x \cdot 4}{25} + \frac{y \cdot \frac{12}{5}}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{25} + \frac{12y}{80} = 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{25} + \frac{3y}{20} = 1 \Leftrightarrow 16x + 15y = 100$.

22168. Δίνονται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, να βρείτε:

i. Την εξίσωση της παραβολής.

ii. Την εστία E της παραβολής.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το O , αν η μια εστία της είναι το σημείο $E(1,0)$ και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4.

Λύση

α) i. Επειδή η παραβολή διέρχεται από το σημείο A , ισχύει ότι $2^2 = 2p \cdot 1 \Leftrightarrow p = 2$, άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 4x$.

ii. Είναι $\frac{p}{2} = 1$, οπότε η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(1,0)$.

β) Επειδή η εστία της έλλειψης είναι το E , ισχύει ότι $\gamma = 1$.

Επειδή ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4, ισχύει ότι $2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Είναι $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{3}$.

Επειδή η έλλειψη έχει κέντρο το O και εστίες στον άξονα x' x , έχει εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

22192. Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$ (1).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E' .

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $B(0,9)$ είναι σημείο της έλλειψης.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της $B(0,9)$.

Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = 225 \Leftrightarrow \alpha = 15$, $\beta^2 = 81 \Leftrightarrow \beta = 9$.

Είναι $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 225 - 81 = 144 \Leftrightarrow \gamma = 12$, άρα οι εστίες της έλλειψης είναι οι $E(12,0)$ και $E'(-12,0)$.

β) Το σημείο B είναι σημείο της έλλειψης, αν και μόνο αν: $\frac{0^2}{225} + \frac{9^2}{81} = 1 \Leftrightarrow \frac{81}{81} = 1$ ισχύει.

γ) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο B έχει εξίσωση $\frac{x \cdot 0}{225} + \frac{y \cdot 9}{81} = 1 \Leftrightarrow 9y = 81 \Leftrightarrow y = 9$.

22268. Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Οι εστίες της E και E', έχουν συντεταγμένες E(.....,) και E'(.....,). Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με και η εκκεντρότητα της είναι ίση με».

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της B(0,-2).

Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = 3$, $\beta^2 = 4 \Leftrightarrow \beta = 2$. Είναι $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 9 - 4 = 5 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{5}$,

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **έλλειψη**. Οι εστίες της E και E', έχουν συντεταγμένες E($\sqrt{5}$, 0) και E'($-\sqrt{5}$, 0). Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με $2\alpha=6$ και η εκκεντρότητα της είναι ίση με $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ».

β) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο B έχει εξίσωση $\frac{x \cdot 0}{9} + \frac{y \cdot (-2)}{4} = 1 \Leftrightarrow -2y = 4 \Leftrightarrow y = -2$.

22556. Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία A'(-5, 0), A(5, 0), B'(0, -4) και B(0, 4).

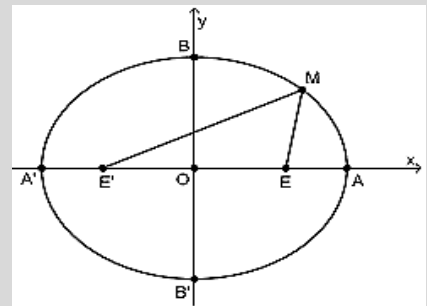
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι (A'A) = 10 και (B'B) = 8.

ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία E'(-3, 0) και E(3, 0).

β) Έστω M ένα σημείο της έλλειψης.

Να αποδείξετε ότι (ME') + (ME) = 10.



Λύση

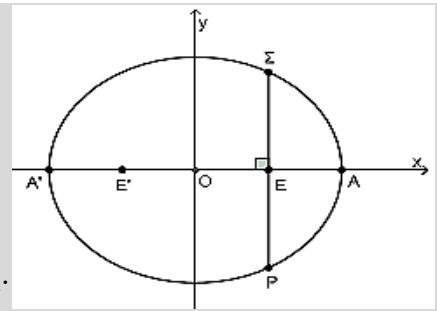
α) i. Επειδή A'(-5, 0), A(5, 0), είναι $\alpha = 5$. Επειδή B'(0, -4), B(0, 4), είναι $\beta = 4$.

Είναι (A'A) = $2\alpha = 10$ και (B'B) = $2\beta = 8$.

ii. Είναι $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \gamma = 3$, άρα οι εστίες είναι τα σημεία E'(-3, 0) και E(3, 0).

β) Από τον ορισμό της έλλειψης ισχύει ότι (ME') + (ME) = $2\alpha = 10$.

22558. Η έλλειψη του διπλανού σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2,0)$, $E(2,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A) = 8$.



α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

β) Έστω Σ και Ρ τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία $E(2,0)$.

Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το Ρ αρνητική τεταγμένη.

i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2,3)$ και $P(2,-3)$.

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣΡ.

Λύση

α) Επειδή οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$, ισχύει ότι $c = 2$.

Είναι $(A'A) = 2a \Leftrightarrow 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$. Είναι $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12 \Leftrightarrow b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

β) i. Επειδή τα σημεία Σ και Ρ έχουν $x = 2$, ισχύει ότι

$$\frac{2^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{y^2}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3, \text{ άρα } \Sigma(2,3) \text{ και } P(2,-3).$$

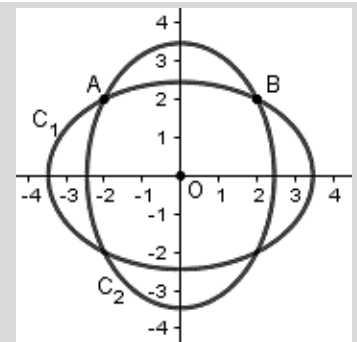
ii. $(\Sigma P) = 3 - (-3) = 6$.

22564. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ϵ_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο Α και η εξίσωση της εφαπτομένης ϵ_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο Β είναι αντίστοιχα $x + 2y - 6 = 0$ και $-2x + y - 6 = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες ϵ_1, ϵ_2 είναι κάθετες.



Λύση

α) Το σημείο Α ανήκει στις C_1, C_2 , αν και μόνο αν: $\frac{2^2}{12} + \frac{2^2}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ ισχύει και

$$\frac{2^2}{6} + \frac{2^2}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \text{ ισχύει.}$$

Όμοια για το Β.

β) Η εφαπτομένη της C_1 στο Α έχει εξίσωση $\epsilon_1: \frac{x \cdot 2}{12} + \frac{y \cdot 2}{6} = 1 \Leftrightarrow 2x + 4y = 12 \Leftrightarrow x + 2y = 6$

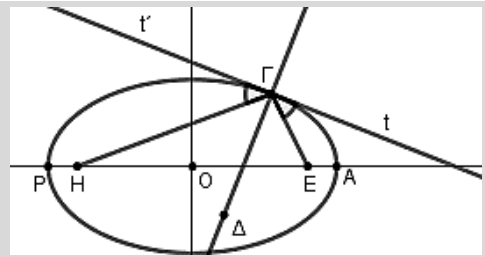
και η εφαπτομένη της C_2 στο Β έχει εξίσωση $\epsilon_2: \frac{x \cdot (-2)}{6} + \frac{y \cdot 2}{12} = 1 \Leftrightarrow -4x + 2y = 12 \Leftrightarrow -2x + y = 6$.

γ) Οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_2 = -\frac{-2}{1} = 2$ αντίστοιχα.

$$\text{Είναι } \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow \epsilon_1 \perp \epsilon_2.$$

4ο Θέμα

20666. Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι μια έλλειψη με μία εστία τον Ήλιο. Η ελάχιστη απόσταση του κέντρου της Γης από το κέντρο του Ήλιου είναι $PH = 147,5$ εκατομμύρια km και η μέγιστη $AH = 152,5$ εκατομμύρια km.



Στο σχήμα θεωρούμε ότι τα σημεία H και Γ είναι τα κέντρα του Ήλιου και της Γης αντίστοιχα. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το μέσο του HE και x'x τον μεγάλο άξονα της έλλειψης, ενώ ο άξονας y'y είναι η μεσοκάθετος του HE. Τέλος, η ευθεία ΓΔ είναι η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Γ.

α) Να αποδείξετε $(PA) = 300$ km, $(HE) = 5$ km και ότι η εκκεντρότητα της έλλειψης

$$\text{είναι } \varepsilon = \frac{1}{60}.$$

β) Για μια τυχαία θέση της Γης πάνω στην ελλειπτική τροχιά, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΗΓΕ.

γ) Αν ονομάσουμε t't την εφαπτομένη ευθεία της έλλειψης στο Γ, να αποδείξετε ότι οι γωνίες t'ΓH και tΓE είναι ίσες.

Λύση

α) Έστω C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ η εξίσωση της ελλειπτικής τροχιάς. Το σημείο H είναι εστία της έλλειψης άρα έχει συντεταγμένες $(-\gamma, 0)$. Τα σημεία A, P είναι τα άκρα του μεγάλου άξονα, άρα $P(-a, 0)$ και $A(a, 0)$. Είναι $PH = 147,5 \Leftrightarrow -\gamma + a = 147,5$ (1) και $AH = 152,5 \Leftrightarrow a + \gamma = 152,5$ (2).

Από (1)+(2) $\Rightarrow 2a = 300 \Leftrightarrow a = 150$ και από την (2) $\Rightarrow 150 + \gamma = 152,5 \Leftrightarrow \gamma = 2,5$.

Είναι $(PA) = 2a = 300$ km και $(HE) = 2\gamma = 5$ km, $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{2,5}{150} = \frac{1}{60}$.

β) Από τον ορισμό της έλλειψης γνωρίζουμε ότι $(\Gamma H) + (\Gamma E) = 2a = 300$, οπότε το τρίγωνο ΗΓΕ έχει περίμετρο: $(\Gamma H) + (\Gamma E) + (HE) = 300 + 5 = 305$ εκατομμύρια km.

γ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι $H\Gamma\Delta = E\Gamma\Delta$ και επειδή $\Gamma\Delta \perp t't'$, οι γωνίες t'ΓH και tΓE είναι συμπληρωματικές ίσων γωνιών και είναι ίσες.

20722. Έστω $K(x, y)$ μεταβλητό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $(KE) + (KE') = 10$, όπου $E(3, 0)$ και $E'(-3, 0)$.

α) Να βρείτε το είδος της καμπύλης C πάνω στην οποία κινείται το σημείο K και να γράψετε την εξίσωσή της, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Έστω C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και $(\varepsilon): 3x + 5y = 25$.

β) Να αποδείξετε ότι C και (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M.

γ) Να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος γ) και να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα την έλλειψη C και την ευθεία ε .

δ) Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{ME'}$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

Λύση

α) Η σχέση $(KE) + (KE') = 10$ ικανοποιεί τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα E', E και μεγάλο άξονα

$$2a = 10 \Leftrightarrow a = 5. \text{ Επειδή } E(3,0) \text{ και } E'(-3,0), \text{ είναι } \gamma = 3, \text{ οπότε } \beta^2 = a^2 - \gamma^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4.$$

Η έλλειψη έχει εξίσωση $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

β) Για τα κοινά σημεία των C , ε έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ 3x + 5y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 + 25y^2 = 400 \\ y = \frac{25-3x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 + 25\left(\frac{25-3x}{5}\right)^2 = 400 \\ y = \frac{25-3x}{5} \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 16x^2 + 25 \frac{625 - 150x + 9x^2}{25} - 400 = 0 \Leftrightarrow 25x^2 - 150x + 225 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{Τότε } y = \frac{25 - 3 \cdot 3}{5} = \frac{16}{5}.$$

Επομένως η έλλειψη C και η ευθεία ε έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $M\left(3, \frac{16}{5}\right)$.

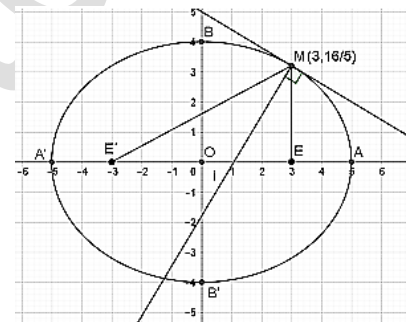
γ) Επειδή η εξίσωση από την οποία προέκυψε η τετμημένη του κοινού σημείου M είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 0$, η ευθεία εφάπτεται της έλλειψης στο M .

δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{EME'}$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο M .

Η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{3}{5}$, οπότε

$$\lambda_\varepsilon \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{5} \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = \frac{5}{3}, \text{ οπότε η διχοτόμος } \delta \text{ έχει εξίσωση:}$$

$$y - \frac{16}{5} = \frac{5}{3}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x - \frac{9}{5}.$$



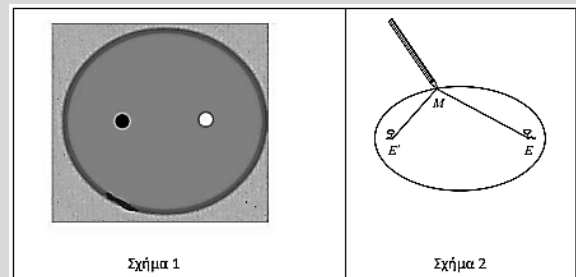
20726. Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο E' . Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία E και E' δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράφει έλλειψη C όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).

α) Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης C .

β) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης C και να βρείτε την εκκεντρότητά της.

γ) Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα (1) ακριβώς στο σημείο E . Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα.

Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης C πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:



- 1) μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα
 - 2) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα
 - 3) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα
 - 4) σε οποιοδήποτε σημείο της C εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα.
- Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Λύση

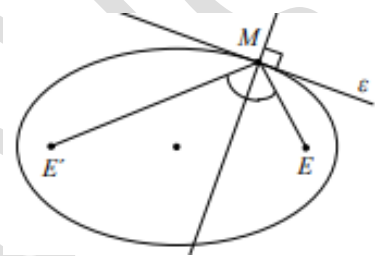
α) Από τον ορισμό της έλλειψης ισχύει ότι $(ME') + (ME) = 2a$, όμως το άθροισμα $(ME') + (ME)$ είναι το μήκος του σχοινιού, οπότε $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$. Επειδή $\gamma = 3$, είναι $\beta^2 = a^2 - \gamma^2 = 25 - 9 = 16 \stackrel{\beta > 0}{\Leftrightarrow} \beta = 4$. Ο μεγάλος άξονας έχει μήκος $(AA') = 10$ και ο μικρός $(BB') = 8$.

β) C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{5}$.

γ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι :

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία Ε Μ Ε', όπου Ε, Ε' οι εστίες της έλλειψης (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα)

Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή ένα ηχητικό κύμα ι μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινούν από τη μία εστία μιας έλλειψης, ανακλώμενα σε αυτήν, διέρχονται από την άλλη εστία. Συνεπώς σε οποιοδήποτε σημείο της C και αν σημαδέψει θα πετύχει το στόχο του, εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα, αφού τότε η μπάλα θα πέσει στην τρύπα χωρίς να χτυπήσει πρώτα στο περίγραμμα του μπιλιάρδου. Σωστή απάντηση η 4).



22273. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii. Των εστιών E και E' της έλλειψης.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 4)$ και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1).

Λύση

α) i. Είναι $\alpha^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = 3$, $\beta^2 = 4 \Leftrightarrow \beta = 2$.

Η έλλειψη τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(a,0)$ και $A'(-a,0)$, δηλαδή στα $A(3,0)$ και $A'(-3,0)$.

ii. Είναι $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 9 - 4 = 5 \stackrel{\gamma > 0}{\Leftrightarrow} \gamma = \sqrt{5}$, άρα οι εστίες είναι τα σημεία $E(\sqrt{5}, 0)$ και $E'(-\sqrt{5}, 0)$.

β) Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης από στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το Α.

Η εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ έχει εξίσωση $\varepsilon: \frac{xx_1}{9} + \frac{yy_1}{4} = 1$.

Η ε διέρχεται από το Α, αν και μόνο αν $\frac{0 \cdot x_1}{9} + \frac{4y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow y_1 = 1$.

Επειδή το M είναι σημείο της έλλειψης, ισχύει ότι

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{9} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{9} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow x_1 = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Για $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ και $y_1 = 1$, η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\frac{x \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{9} + \frac{y \cdot 1}{4} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x + 3y = 24$ και για

$x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ και $y_1 = 1$, η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\frac{x \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)}{9} + \frac{y \cdot 1}{4} = 1 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}x + 3y = 24$.

Ασκησότητες

Υπερβολή

2ο Θέμα

16128. Δίνεται η υπερβολή (C): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E .

β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$.

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C).

Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$, $\beta^2 = 9 \Leftrightarrow \beta = 3$ και $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 25 \Leftrightarrow \gamma = 5$

Οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$.

β) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής από τις εστίες ισούται με 2α . Έτσι, θα έχουμε ότι $|(NE') - (NE)| = 2 \cdot 4 = 8$.

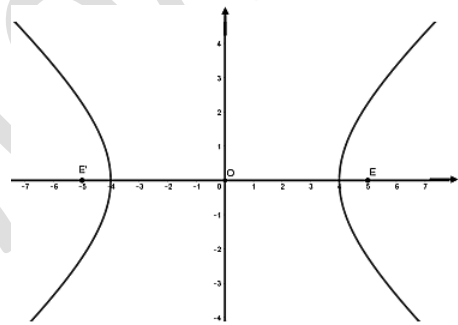
γ) Γνωρίζουμε ότι η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$

στα σημεία $(-\alpha, 0)$ και $(\alpha, 0)$, δηλαδή

στα $(-4, 0)$ και $(4, 0)$.

Αν $x = 0$ τότε $-\frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = -\beta^2$ αδύνατο, άρα η υπερβολή

δεν τέμνει τον $y'y$.



17942. Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1, 2022)$ μπορεί να ανήκει στην (C).

Λύση

α) Η εξίσωση (C) είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, οπότε είναι υπερβολή.

Είναι $\alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$, $\beta^2 = 9 \Leftrightarrow \beta = 3$ και $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 13 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{13}$. Οι εστίες της υπερβολής είναι $E'(-\sqrt{13}, 0)$ και $E(\sqrt{13}, 0)$.

β) Το M ανήκει στην υπερβολή αν και μόνο αν

$\frac{1^2}{4} - \frac{2022^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9 - 4 \cdot 2022^2 = 36 \Leftrightarrow -4 \cdot 2022^2 = 27$ αδύνατο. Άρα το M δεν είναι σημείο της υπερβολής (C).

20721. Δίνεται η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της C.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C.

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

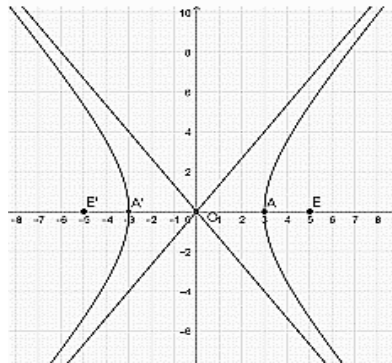
Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$, $\beta^2 = 16 \Rightarrow \beta = 4$ και $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 25 \Rightarrow \gamma = 5$, άρα οι εστίες είναι $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$.

β) Γνωρίζουμε ότι οι ασύμπτωτες είναι οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{\beta}{\alpha}x$, άρα

$$\varepsilon_1: y = \frac{4}{3}x \text{ και } \varepsilon_2: y = -\frac{4}{3}x.$$

γ)

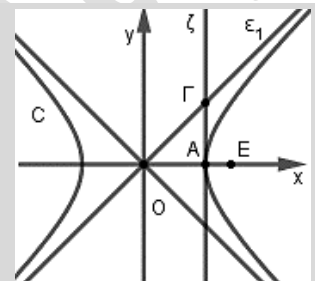


20869. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$, η εστία της E , η εφαπτομένη της ζ στο σημείο $A(1,0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία ε_1 της υπερβολής.

α) Να βρείτε τις εστίες E' , E και τις ασύμπτωτες ε_1 , ε_2 της υπερβολής.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ζ .

ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1,1)$.



Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = \beta^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = 1$ και $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{2}$, οπότε $E'(-\sqrt{2}, 0)$, $E(\sqrt{2}, 0)$, $\varepsilon_1: y = x$ και $\varepsilon_2: y = -x$.

β) Η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(a, 0)$ δηλαδή $(1, 0)$. Επειδή η ζ είναι κάθετη στον $x'x$ στο A , έχει εξίσωση $x = 1$.

γ) Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής της ε_1 με τη ζ , οπότε $y = x = 1$, άρα $\Gamma(1,1)$.

21218. Δίνονται οι υπερβολές $(C_1): x^2 - y^2 = 1$, $(C_2): y^2 - x^2 = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της C_1 είναι οι $E_1(\sqrt{2}, 0)$, $E'_1(-\sqrt{2}, 0)$.

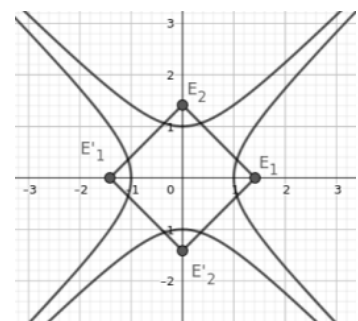
β) Αν E_2, E'_2 οι εστίες της C_2 τότε να αποδείξετε ότι το $E_1E_2E'_1E'_2$ είναι τετράγωνο.

Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ και $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 2 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{2}$, οπότε $E_1(\sqrt{2}, 0)$, $E'_1(-\sqrt{2}, 0)$.

β) Είναι $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ και $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 2 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{2}$, οπότε $E_2(0, \sqrt{2})$, $E'_2(0, -\sqrt{2})$.

Στο τετράπλευρο $E_1E_2E'_1E'_2$ οι διαγώνιες του διχοτομούνται κάθετα, οπότε είναι ρόμβος. Επειδή επιπλέον οι διαγώνιές του είναι ίσες, είναι τετράγωνο.



21649. Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C .

β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C .

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

Λύση

α) Επειδή η υπερβολή έχει εστίες $E(5,0)$, $E'(-5,0)$, είναι $\gamma=5$.

Είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{5}{\alpha} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \alpha = 4$. Είναι $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \beta = 3$.

Επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον $x'x$, έχει εξίσωση $C: \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

β) $\varepsilon_1: y = \frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{3}{4}x$.

γ) Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$ έχει εξίσωση: $\frac{x \cdot 5}{16} - \frac{y \cdot \frac{9}{4}}{9} = 1 \Leftrightarrow 5x - 4y = 16$.

21651. Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

Λύση

α) Επειδή η υπερβολή έχει εστίες $E(5,0)$, $E'(-5,0)$, είναι $\gamma = 5$ και η εξίσωσή της είναι της μορφής

$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Επειδή διέρχεται από το σημείο A , είναι $\frac{4^2}{\alpha^2} - \frac{0^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$.

Η εκκεντρότητά της είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{4}$.

β) Είναι $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 25 - 16 = 9$, οπότε η εξίσωση της C είναι $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

γ) Η εφαπτομένη της υπερβολής στο M έχει εξίσωση: $\frac{x \cdot 5}{16} - \frac{y \cdot \frac{9}{4}}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{5x}{16} - \frac{y}{4} = 1$.

22169. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της A και A' είναι 8.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής.

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής;

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

Λύση

α) i. Η ασύμπτωτη της υπερβολής είναι η $y = \frac{\beta}{\alpha}x$, άρα $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{4}\alpha$.

Η απόσταση των κορυφών της A και A' είναι 2α , άρα $2\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4$, οπότε $\beta = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$.

Η εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

ii. Είναι $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow \gamma = 5$, άρα οι εστίες είναι τα σημεία E'(-5,0) και E(5,0).

β) Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $\left(5, \frac{9}{4}\right)$ έχει εξίσωση: $\frac{x \cdot 5}{16} - \frac{y \cdot \frac{9}{4}}{9} = 1 \Leftrightarrow 5x - 4y = 16$.

22196. Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2 - y^2 = 25$ (1).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ϵ_1), (ϵ_2) της υπερβολής.

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ϵ_1), (ϵ_2); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Η υπερβολή είναι ισοσκελής με $\alpha^2 = \beta^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 5$.

Είναι $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 50 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, άρα οι εστίες είναι τα σημεία E'(-5√2,0) και E(5√2,0).

β) Οι ασύμπτωτες της ισοσκελούς υπερβολής είναι οι ευθείες $\epsilon_1 : y = x$ και $\epsilon_2 : y = -x$.

γ) Οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ με $\lambda_1 \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \epsilon_1 \perp \epsilon_2$, οπότε η μεταξύ τους γωνία είναι ορθή.

22269. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας:

i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.

ii. Την εκκεντρότητά της.

iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της,

$A\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$.

Λύση

α) i. Είναι $\alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$, $\beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$ και $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 5 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{5}$, άρα οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-\sqrt{5}, 0)$ και $E(\sqrt{5}, 0)$.

ii. $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

iii. Είναι $\varepsilon_1: y = \frac{\beta}{\alpha}x = \frac{1}{2}x$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{1}{2}x$.

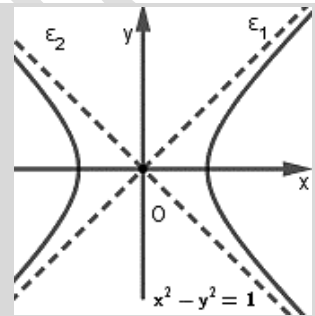
β) Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $A\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$ έχει εξίσωση

$$\frac{x \cdot \sqrt{5}}{4} - y \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5}x - 2y = 4.$$

22051. Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της υπερβολής ότι:

α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημορίου, αντίστοιχα.

β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.



Λύση

α) Έχουμε την υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$ η οποία γράφεται στην μορφή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha = \beta = 1$. Οι

εξισώσεις των ασύμπτωτων είναι $(\varepsilon_1): y = \frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y = x$ και $(\varepsilon_2): y = -\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y = -x$.

β) Είναι $\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = 1 \cdot (-1) = -1$ άρα $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

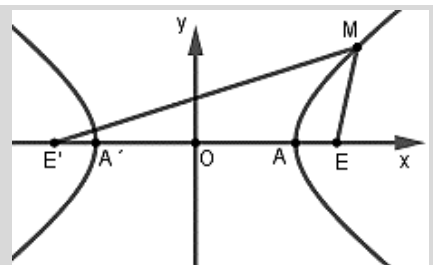
22559. Η υπερβολή στο διπλανό σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10, 0)$ και $E(10, 0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8, 0)$ και $A(8, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

β) Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $|(ME') - (ME)| = 16$.

ii. Αν $(ME) = 9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E' .



Λύση

α) Είναι $\gamma = 10$, $\alpha = 8$ και $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow \beta = 6$, οπότε η υπερβολή έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

β) i. Από τον ορισμό της υπερβολής ισχύει ότι $|(ME') - (ME)| = 2\alpha = 16$.

ii. $|(ME') - (ME)| = 16 \Leftrightarrow |(ME') - 9| = 16 \Leftrightarrow (ME') - 9 = \pm 16 \Leftrightarrow$
 $((ME') - 9 = -16 \Leftrightarrow (ME') = -7 \text{ αδύνατο}) \text{ ή } ((ME') - 9 = 16 \Leftrightarrow (ME') = 25).$

22561. Στο διπλανό σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες δ_1, δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της M(5,4).

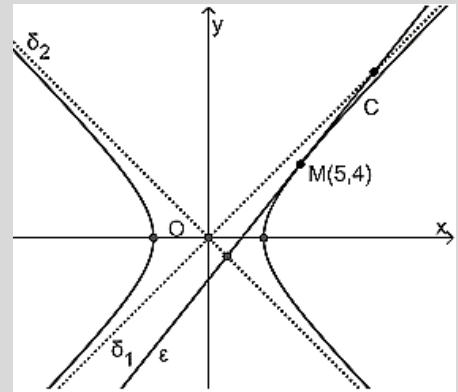
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτωτών είναι

$$\delta_1 : y = x \text{ και } \delta_2 : y = -x.$$

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $5x - 4y = 9$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2 .



Λύση

α)i. Η υπερβολή είναι ισοσκελής με $\alpha^2 = \beta^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 3$.

Οι ασύμπτωτες της ισοσκελούς υπερβολής είναι οι ευθείες $\delta_1 : y = x$ και $\delta_2 : y = -x$.

ii. Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της A(5,4) έχει εξίσωση: $x \cdot 5 - y \cdot 4 = 9 \Leftrightarrow 5x - 4y = 9$.

β) Είναι $\begin{cases} \epsilon : 5x - 4y = 9 \\ \delta_1 : y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4x = 9 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow y = x = 9$, άρα κοινό σημείο των ε, δ_1 είναι το (9,9).

Είναι $\begin{cases} \epsilon : 5x - 4y = 9 \\ \delta_2 : y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4x = 9 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$, άρα κοινό σημείο των ε, δ_2 είναι το (1,-1).

22567. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή

$$C : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ τέμνει τον άξονα } x'x \text{ στα σημεία}$$

$A'(-4,0), A(4,0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

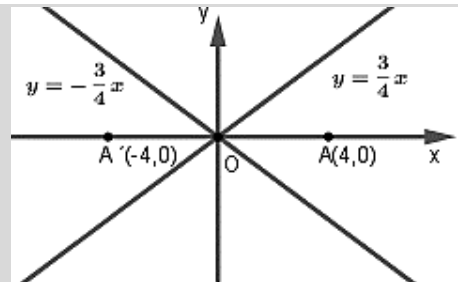
$$y = \frac{3}{4}x \text{ και } y = -\frac{3}{4}x.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha = 4$ και $\beta = 3$.

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C.



Λύση

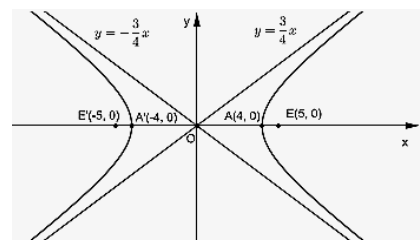
α) i. Οι κορυφές της υπερβολής είναι τα σημεία $A'(-\alpha,0)$ και $A(\alpha,0)$, άρα $\alpha = 4$.

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$,

$$\text{άρα } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \beta = 3.$$

ii. Είναι $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow \gamma = 5$, άρα οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β)



22566. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$.

Λύση

α) $4x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

Η υπερβολή έχει εστίες στον $x'x$. Είναι $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$, άρα οι κορυφές της υπερβολής είναι τα σημεία $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$.

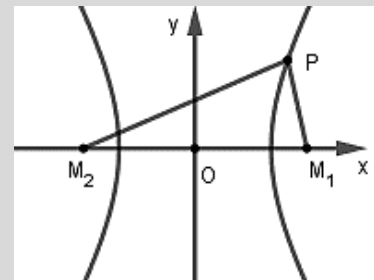
β) Είναι $b^2 = 4 \Leftrightarrow b = 2$, οπότε οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y = \frac{2}{1}x = 2x$ και $y = -2x$.

γ) Η ευθεία που είναι παράλληλη της ασύμπτωτης $y = -2x$, και διέρχεται από το $A(1,0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -2$, άρα έχει εξίσωση $y - 0 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 2$.

4ο Θέμα

20653. Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκπυρσοκρότησης του όπλου.

Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4 sec αργότερα από τον παρατηρητή M_2 .



α) Αν ονομάσουμε P την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι

$$(PM_1) - (PM_2) = 1360 \text{ m.}$$

Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι 340 m/sec.

β) Να αποδείξετε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2 .

γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση (M_1M_2) είναι 1378 m, να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή

έχει εξίσωση $\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1$, θεωρώντας ως άξονα $x'x$ την ευθεία M_1M_2 και κέντρο της

υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $37^2 = 1369$.

Λύση

α) Έστω t sec η χρονική στιγμή που ο παρατηρητής M_2 ακούει το όπλο, τότε η απόσταση του από το P είναι $(PM_2) = 340t$ m. Τον ίδιο ήχο ο παρατηρητής M_1 τον ακούει τη χρονική στιγμή $t + 4$ sec και η απόσταση του από το P είναι $(PM_1) = 340(t + 4)$ m $\Leftrightarrow (PM_1) = 360t + 1360 \Leftrightarrow (PM_1) = (PM_2) + 1360 \Leftrightarrow (PM_1) - (PM_2) = 1360$.

β) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι $|(PM_1) - (PM_2)| = 2a$ και επειδή $(PM_1) > (PM_2)$ είναι $(PM_1) - (PM_2) = 1360$. Επομένως το P βρίσκεται στο δεξιό κλάδο υπερβολής που έχει εστίες τα M_1 , M_2 και $2a = 1360 \Leftrightarrow a = 680$.

γ) Είναι $(M_1 M_2) = 1378 \Leftrightarrow 2\gamma = 1378 \Leftrightarrow \gamma = 689$.

Είναι $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 689^2 - 680^2 = (689 - 680)(689 + 680) = 9 \cdot 1369 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{9 \cdot 1369} = 3 \cdot 37 = 111$.

Επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον x' x , η εξίσωσή της είναι: $\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1$.

22174. Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης $E(\gamma, 0)$, ενώ η άλλη εστία είναι στο $E'(-\gamma, 0)$.

Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

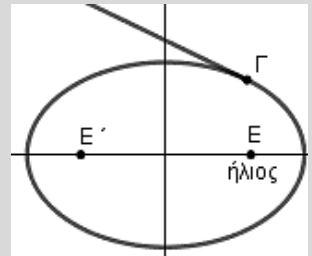
i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που

κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Oy . Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο $\Delta(0, 5)$.

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{ με } x > 0.$$

Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;



Λύση

α) Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι $(AA') = 2a \Leftrightarrow 2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$.

Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $e = \frac{\gamma}{a} = \frac{\gamma}{5}$, άρα $\frac{\gamma}{5} = 0,6 \Leftrightarrow \gamma = 3$.

Είναι $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$, οπότε η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

β) i. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Γ έχει εξίσωση:

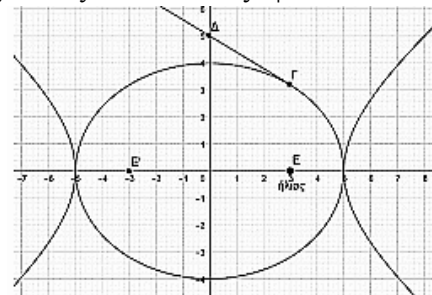
$\frac{x \cdot 3}{25} + \frac{y \cdot \frac{16}{5}}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{3x}{25} + \frac{y}{5} = 1 \Leftrightarrow 3x + 5y = 25$. Για να διέρχεται αυτή η ευθεία από το σημείο Δ , πρέπει και αρκεί $3 \cdot 0 + 5 \cdot 5 = 25 \Leftrightarrow 25 = 25$ ισχύει. Άρα η εφαπτομένη στο Γ διέρχεται από το Δ .

ii. Σημεία συνάντησης των τροχιών είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους εφόσον υπάρχουν. Είναι

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 \frac{x^2}{25} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5.$$

Για $x = \pm 5$ είναι $\frac{25}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{16} = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Σημεία συνάντησης είναι τα $(5, 0)$ και $(-5, 0)$.



21657. Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες πάνω στον άξονα xx' της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C .

ii. την εκκεντρότητα της C .

β) Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ και (ζ) τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασύμπτωτων της C (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές),

i. να δείξετε ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C .

ii. είναι η ευθεία (ζ) εφαπτόμενη της C ; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Επειδή το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής είναι τετράγωνο, είναι $a = b$, οπότε οι ασύμπτωτες είναι οι ευθείες $y = x$ και $y = -x$.

ii. Είναι $\varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \varepsilon = \sqrt{2}$.

β) Η υπερβολή έχει εξίσωση $C: x^2 - y^2 = a^2$. Επειδή διέρχεται από το σημείο $(2,0)$, είναι

$$2^2 - 0 = a^2 \Leftrightarrow a^2 = 4, \text{ άρα } C: x^2 - y^2 = 4.$$

Η ευθεία (ζ) επειδή είναι παράλληλη σε μία από τις ασύμπτωτες, θα έχει εξίσωση της μορφής $\varepsilon: y = x + k$ ή $y = -x + k$, $k \neq 0$.

i. Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των ε, C προκύπτουν από τα συστήματα $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = x + k \end{cases}$,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = -x + k \end{cases}.$$

$$\text{Είναι } \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = x + k \end{cases} \Rightarrow x^2 - (x + k)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - x^2 - 2kx - k^2 = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{k^2 + 4}{2k} \text{ και}$$

$$y = -\frac{k^2 + 4}{2k} + k = -\frac{3k^2 + 4}{2k}, \text{ άρα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.}$$

$$\text{Όμοια } \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = -x + k \end{cases} \Rightarrow x^2 - (x + k)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - x^2 + 2kx - k^2 = 4 \Leftrightarrow x = \frac{k^2 + 4}{2k} \text{ και}$$

$$y = -\frac{k^2 + 4}{2k} + k = -\frac{3k^2 + 4}{2k}, \text{ άρα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. Επομένως σε κάθε περίπτωση οι } \varepsilon, C$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

ii. Επειδή το μοναδικό κοινό σημείο έχει προκύψει από εξίσωση 1ου βαθμού και όχι 2ου βαθμού, η ευθεία δεν εφάπτεται της υπερβολής.

32206. Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(5, \frac{9}{4})$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EME'}$.

δ) Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της. Δίνεται ότι $\sqrt{1681} = 41$.

Λύση

α) Από τον ορισμό της υπερβολής ισχύει ότι

$$2\alpha = |(ME') - (ME)| = \left| \sqrt{(5+5)^2 + \left(\frac{9}{4}-0\right)^2} - \sqrt{(5-5)^2 + \left(\frac{9}{4}-0\right)^2} \right| \Leftrightarrow$$

$$2\alpha = \left| \sqrt{100 + \frac{81}{16}} - \frac{9}{4} \right| = \left| \sqrt{\frac{1681}{16}} - \frac{9}{4} \right| = \left| \frac{41}{4} - \frac{9}{4} \right| = \frac{32}{4} = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4$$

Επειδή οι εστίες είναι τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$, είναι $\gamma = 5$. Είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{4}$.

β) $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \beta = 3$, άρα $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

γ) Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{EME'}$ είναι η εφαπτομένη της υπερβολής στο M , οπότε έχει εξίσωση:

$$\frac{x \cdot 5}{16} - \frac{y \cdot \frac{9}{4}}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{5x}{16} - \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow 5x - 4y = 16.$$

δ) Οι ασύμπτωτες είναι οι ευθείες

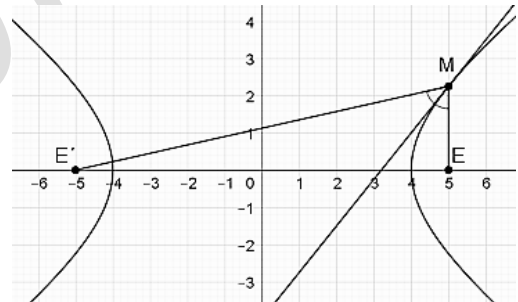
$$\varepsilon_1: y = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow 4y = 3x \Leftrightarrow -3x + 4y = 0 \text{ και}$$

$$\varepsilon_2: y = -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow 4y = -3x \Leftrightarrow 3x + 4y = 0.$$

Έστω $\vec{\delta}_1$ διάνυσμα παράλληλο στην ε_1 , τότε $\vec{\delta}_1 = (4, 3)$ και $\vec{\delta}_2$ διάνυσμα παράλληλο στην ε_2 , τότε $\vec{\delta}_2 = (4, -3)$.

Είναι $\cos(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \frac{4 \cdot 4 + 3 \cdot (-3)}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{25}} = \frac{7}{25}$, οπότε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που

σχηματίζουν οι ασύμπτωτές είναι $\frac{7}{25}$.



3ο Θέμα

17944. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εστιακή απόσταση

$$EE' = 2\sqrt{7} \text{ και εκκεντρότητα } \varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{3}$.

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, A' της υπερβολής (C).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C).

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της.

Λύση

α) Ισχύει ότι η εστιακή απόσταση είναι $2\gamma = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{7}$.

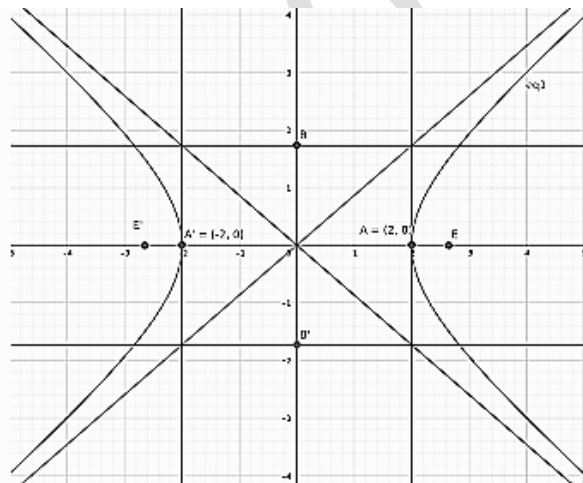
Για την εκκεντρότητα της υπερβολής ισχύει ότι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Είναι $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = (\sqrt{7})^2 - 2^2 = 7 - 4 = 3 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{3}$.

β) i) Οι κορυφές της υπερβολής έχουν συντεταγμένες $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$.

ii) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι $\varepsilon_1: y = \frac{\beta}{\alpha}x = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

γ) Η γραφική παράσταση και τα υπόλοιπα στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



1ο Θέμα

21973.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$ τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

ii. Η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$, έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

iii. Η διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 2px$, έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.

v. Η εξίσωση: $x^2 + y^2 = a^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Σ iv. Σ v. Λ

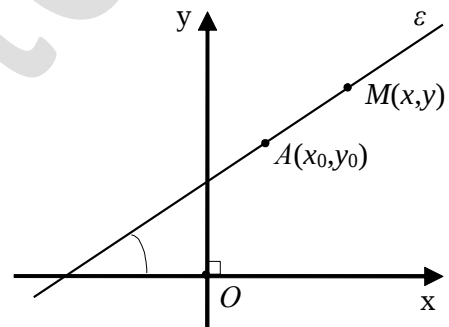
β) Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων

στο επίπεδο και $A(x_0, y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου.

Έστω ένα δεύτερο σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$

σημείο της ευθείας ε .

Είναι $\vec{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ και $\lambda_{\vec{AM}} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$.



Ισχύουν οι ισοδυναμίες: $\vec{AM} // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\vec{AM}} = \lambda_{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda \Leftrightarrow$

$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$. Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο

$A(x_0, y_0)$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.